

སློབ་ཚན་བདུན་པ། ཚན་མང་ཚུལ།

CHAPTER 7 : POLYNOMIALS

༡.༡ རོ་སློབ། Introduction

འཛིན་གྲ་གོང་མའི་ནང་ཁྱེད་གྱིས་ཚབ་ཕྱིས་ཚུལ་སྤྲངས་ཡོད། ཁྱེད་གྱིས་ཤེས་གསལ་ལྟར། ཚབ་ཕྱིས་ཚུལ་ནང་ཡིག་འབྲུའི་གངས་མང་པོ་ཡོང་སྲིད་པ་དང་། ཡིག་འབྲུ་དེ་དག་ལ་**ཀླུ་ཡང་**ཟེར། ཚབ་ཕྱིས་ཚུལ་ནང་ཡོད་པའི་ཡིག་འབྲུའི་གངས་དེ་དག་གི་སྟོན་གངས་ནི་མོ་གངས་མེན་པའི་རིལ་གངས་ཁོ་ན་ཡིན། དེ་འདྲའི་ཁྱད་ཚོས་ལྡན་པའི་ཚབ་ཕྱིས་ཚུལ་ལ་**ཚན་མང་ཚུལ་** (Polynomials) ཟེར། ཚན་མང་ཚུལ་ཁ་གསལ་ལ་ཡིག་འབྲུའི་གངས་ x ལྟ་བུ་རིགས་གཅིག་ལས་མེད། འདི་འདྲའི་ཚན་མང་ཚུལ་ལ་ང་ཚོས་**ཀླུ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུལ་** (Polynomials in one variable) ཟེར།

སློབ་ཚན་འདིར་ང་ཚོས་ཀླུ་གཅིག་ཅན་གྱི་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་སྐོར་སྤྲང་བྱ་དང་། **ཚན་གུང་ཚུལ་** (Monomial) དང་**ཉིས་ཚན་ཚུལ་** (Binomial) གྱིས་ཚན་མང་ཚུལ་བཟོ་སྤྲངས་སྐོར་ཡང་སྤྲང་བྱ་ཡིན་པ་ཟེར། བཟོ་དེ་ཕྱིས་གྱི་བརྒྱུད་རིམ་སྐབས་གྱི་བཟོ་དེ་བྱེད་དང་། བཟོ་བྱ། བཟོས་ཐོབ། བཟོས་ལྷག་གི་འབྲེལ་བ་གལ་ཆེན་གཉིས་གྱི་སྐོར་ཡང་འབྲེལ་བཟོ་དེ་བྱ་བྱ་ཡིན།

༡.༢ ཀླུ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུལ། Polynomials in One Variable

ལེ་ཚན་༡.༡ ནང་གསལ་ཁ་བཏོན་ཡོད་པ་ལྟར། ཚན་མང་ཚུལ་ནི་ཀླུ་ཡི་སྟོན་གངས་མོ་མེན་པའི་རིལ་གངས་ཅན་གྱི་ཚབ་ཕྱིས་ཚུལ་ལ་ཟེར། དཔེར་ན། ག་གསལ་གསལ་ཚུལ་ཚང་མ་ཚན་མང་ཚུལ་རེད།

$$17 + 2x + x^2 , 7x^3 + \sqrt{2} x^2 y - 5x y^2 + 12 y^3 , x^4 + 3x - 9$$

གོང་གསལ་ལས་དང་པོ་དང་མཐའ་མ་ནི་ཀླུ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུལ་རེད། འདིའི་སྐབས་ཚན་མང་ཚུལ་ཞེས་པ་ཀླུ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུལ་ལ་གོ་དགོས། ག་གསལ་གསལ་ཚུལ་ལས་གང་ཞིག་ཚན་མང་ཚུལ་རེད་དམ།

$$6 + 2x^{-2} + x^2 , x^2 + 3\sqrt{x} - 9 , 2x^2 - x^{\frac{1}{3}} + 4$$

ཚུལ་དང་པོའི་སྐབས་སུ། ཀླུ་ x ནི་སྟོན་གངས་མོ་གངས་ནང་ཡོད། ཚུལ་གཉིས་པ་དང་གསུམ་པའི་སྐབས་སུ་

རྒྱ་ཡི་སྟོན་གྲངས་རིལ་གྲངས་ཤི་མིན། དེས་ན་འདི་དག་ལས་གང་ཡང་ཚན་མང་ཚུ་ལ་མིན།

ཚན་པ་གཅིག་རང་ཡོད་པའི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ལ་ཚན་རྒྱང་ཚུ་ལ་ཟེར། ཚན་པ་གཉིས་ཡོད་པའི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ལ་གྲིས་ཚན་ཚུ་ལ་ཟེར། ཚན་པ་གསུམ་ཡོད་པའི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ལ་**སུམ་ཚན་ཚུ་ལ་**(Trinomials) ཟེར། ཚན་མང་ཚུ་ལ་ཞེས་ཚན་མང་གི་ཚོག་དོན་ནི་ཚན་པ་མང་པོ་ཡོད་པའི་ཚབ་ཅུས་ཀྱི་ཚུ་ལ་ལ་གོ་དགོས། འོན་ཀྱང་འདི་ནི་ཚན་རྒྱང་ཚུ་ལ་དང་། གྲིས་ཚན་ཚུ་ལ། ཚན་མང་ཚུ་ལ་ལའང་སྤྱོད་དོ། །

རྒྱ་x ལྷ་པུ་གཅིག་ཡོད་པའི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ལ་རྒྱ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ཟེར།

དེས་ན། $5x^2 + 13x - 9$ ནི་རྒྱ་x ཡི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་རེད།
 $y^3 + 7y - 19$ ནི་རྒྱ་y ཡི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་རེད།

སྤྱིར་བཏང་ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་ཚན་པ་ནམས་དེའི་རྒྱའི་སྟོན་གྲངས་འགྲིབ་རིམ་བཞིན་འབྲི་ཡི་ཡོད། འདི་ལ་**ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་ཚད་ལྡན་རྣམ་པ་**(Standard form of a polynomial) ཟེར། རྒྱ་མེད་པའི་ཚན་པ་ནི་མཐའ་མར་འབྲོའོ། འདི་སྐབས་རྒྱ་ཡི་བྲིན་གང་ཡིན་ཡང་དེ་ཉིད་འགྱུར་བ་མི་འགྲོ་བས་ཚན་པ་འདིར་**རྟག་གྲངས་ཚན་པ་**(Contant Term) ཟེར། རྒྱ་x ཡིན་པའི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ནམ་རྒྱུ་དུ་ $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ མཚོན་གྱི་ཡོད། ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་རྒྱ་ཡི་སྟོན་གྲངས་ཆེ་ཤོས་ལ་**ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་ཐེངས་གྲངས་**(Degree of the Polynomial) ཟེར།

འགྲེལ་བཤད། 1 ཚན་མང་ཚུ་ལ་ $5x^2 + 13x - 9$ ནང་x ཡི་ཐེངས་གྲངས་མཐོ་ཤོས་2 རེད། འདི་ལ་**ཚོས་གྲིས་ཐེངས་ཚན་མང་ཚུ་ལ་**(Second degree polynomial) ཡང་ན་ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་ཐེངས་གྲངས་2 རེད་ཟེར།

འགྲེལ་བཤད། 2 y ཡི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ $y^3 + 17y$ ནང་ཐེངས་གྲངས་མཐོ་ཤོས་3 རེད། འདི་ལ་**སུམ་ཐེངས་ཚན་མང་ཚུ་ལ་**(Third degree polynomial) ཡང་ན། **ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་སུམ་ཐེངས་**ཟེར།

འགྲེལ་བཤད། 3 p ཡི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ $2p + 3$ ནི་གཅིག་ཐེངས་ཚན་མང་ཚུ་ལ་རེད།

འགྲེལ་བཤད། 4 རྟག་གྲངས་3 ཡང་ན་-72 ལ་**ཐེངས་གྲངས་ལྔ་དུ་གོ་ར་ཚན་མང་ཚུ་ལ་**(Zero degree polynomial) ཟེར། རྒྱ་མཚན་ནི་ང་ཚོས་གྲངས་3 ལྷ་པུ་ནི་ $3x^0$ ཡིན་པར་བསམ་ཚོག་

མཚན།

ཐེངས་གྲངས་གཉིས་པའི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ལ་གྲིས་ཐེངས་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ཡང་ཟེར། ཐེངས་གྲངས་གསུམ་པའི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ཐེངས་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ཡང་ཟེར།

མང་ཚུ་ལ་ཡང་ཟེར།

2.3 ཚན་མང་ཚུལ་ཚན་མང་ཚུལ་གྱིས་བཞོ་བ།



Division of a Polynomial by a Polynomial

རིལ་གྲངས་ཀྱི་བཞོད་ཚུལ་རྒྱལ་སྤངས་སློབ་བློ་གསོ་གྱིས་དང་། ང་ཚོ་གནས་སྤངས་མི་འདྲ་བ་གཉིས་ལ་འཕྲད་གྱི་ཡོད། དང་པོ་ནི་རིལ་གྲངས་ཤིག་གཞན་དེས་རྒྱལ་པོར་བཞོ་ཐུབ་པ་དེ་རེད།

དཔེར་ན། ང་ཚོས་12 དེ་4 ཡིས་བཞོ་ན་ང་ཚོར་བཞོས་ཐོབ་3 བྱུང་ཡོད། (འདི་ནི་12 དེ་3 གྱིས་བཞོས་ན་བཞོས་ཐོབ་4 བྱུང་བའི་དོན་ཡང་ཡིན།) འདི་ཡི་དོན་དངོས་ནི་ང་ཚོས་ $12 \div 4$ དེ་རིལ་གྲངས་སུ་སྤངས་བཞོར་བཞོས་པ་ཞིག་རེད།

གནས་སྤངས་གཉིས་པའི་སྐབས་རིལ་གྲངས་རྒྱལ་པོར་བཞོ་མ་ཐུབ་པའམ་བཞོས་ལྷག་བྱུང་བ་དེ་རེད། དཔེར་ན། ང་ཚོས་12 དེ་7 གྱིས་བཞོ་མི་རུང་བ་དང་། 12 དེ་7 གྱིས་བཞོས་ན་བཞོས་ཐོབ་1 དང་། བཞོས་ལྷག་5 འབྱུང་།

རྒྱ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་སྐབས་སུ་འདྲ་བཞོད་ཚུལ་གྱི་བརྒྱུད་རིམ་ལ་ང་ཚོར་གནས་སྤངས་དེ་རང་འཕྲད་གྱི་ཡོད། སྐབས་རེར་དེ་ནི་སྤངས་བཞོར་བཞོས་ཐོབ་ཁོ་ན་སྟེ། ཚན་མང་ཚུལ་ཞིག་གཞན་གྱིས་བཞོས་ན་ཚན་མང་ཚུལ་ཐོབ་གྱི་ཡོད། ཡིན་ནའང་ང་ཚོར་འདི་ལྟ་བུར་འཕྲད་གྱི་མེད། གནས་སྐབས་འདི་ལ་ང་ཚོར་བཞོས་ཐོབ་དང་བཞོས་ལྷག་འབྱུང་། གནས་སྐབས་འདི་གཉིས་ལ་ང་ཚོས་བཞོས་ལྷག་ལྷན་ཀོར་ཅན་དང་། བཞོས་ལྷག་ལྷན་ཀོར་མིན་པ་བཅས་ཟེར་རྒྱ་ཡིན།



2.4 ཚན་མང་ཚུལ་ཚན་མང་ཚུལ་གྱིས་བཞོ་བ་སྟེ་བཞོས་ལྷག་ལྷན་ཀོར་ཅན།

Division of a Polynomial by a Polynomial : Zero-remainder

ང་ཚོས་གནས་སྐབས་སྤངས་བཞོར་ནས་འགོ་འཇུག་རྒྱ་ཡིན། འདིར་ཚན་མང་ཚུལ་ $p(x)$ ཚན་མང་ཚུལ་གཞན་ $q(x)$ ཡིས་བཞོས་ཏེ་ཚན་མང་ཚུལ་གསུམ་པ་ $r(x)$ འབྱུང་། བཞོད་ཚུལ་གྱི་བརྒྱུད་རིམ་ནི་སྤྱིར་ཚུལ་གྱི་བརྒྱུད་རིམ་དང་དམིགས་ཀྱི་འབྲེལ་བ་ཡོད། ཚེས་དམའ་བའི་རིམ་པ་ནང་རིལ་གྲངས་ཀྱི་སྤྱི་ཚུལ་ཚང་མའི་གཞི་རྩ་རེར་གསལ་བྱ་བ་སྟེ་པ་བཞིན་བཞོད་ཚུལ་གྱི་གཞི་རྩ་གཉིས་རེ་ཡོད།

སྤྱིར་ཚུལ་གྱི་གཞི་རྩ། $5 \times 4 = 20$

དེ་དང་འབྲེལ་བའི་བཞོད་ཚུལ་གྱི་གཞི་རྩ་ནི། $20 \div 5 = 4$, $20 \div 4 = 5$

ང་ཚོས་གོ་དོན་འདི་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་བཤོད་ཚིག་བརྒྱུད་རིམ་སྐབས་སུ་རྒྱ་བརྒྱུད་ཚོགས། །གལ་ཏེ་སྤྲད་ཟིན་པའི་
 ཚན་མང་ཚུལ་ནི་ཚན་མང་ཚུལ་གཞན་གཉིས་ཀྱི་བརྒྱུད་ཐོབ་ཡིན་ན། ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་རྒྱུར་ཚིག་གི་ཚ་འདི་ཡིས་
 ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་བཤོད་ཚིག་གི་གཞི་ཚ་གཉིས་བརྟན་གྱི་ཡོད། འདི་ནས་སློབ་ཚན་འདི་ཡིས་མཇུག་བར་དུ་ཚིག་དཔེར་
 བཤོད་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་ལ་རྒྱ་གཅིག་ཁོ་ན་ཡིན་ཤིང་གྲ་རྒྱ་ཡིན། དེས་ན་ང་ཚོས་ $p^2 + 3p - 28$ དེ་ $p - 4$ ཡིས་
 བཤོད་ཐབས་བྱེད་པ་ལས་ $y - 4$ ཡིས་བྱ་རྒྱུ་མིན།



13.7 ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གྲིས་བཤོ་བ།

Division of a Monomial by a Monomial



འགྲེལ་བཤད། 1 རྒྱུར་ཚིག་གི་གཞི་ཚ། $x^3 \times x^2 = x^5$
 བཤོད་ཚིག་དང་འགྲེལ་བའི་གཞི་ཚ། $x^5 \div x^3 = x^2$, $x^5 \div x^2 = x^3$

ང་ཚོས་བཤོད་ཚིག་གི་གཞི་ཚ་ནམས་གཤམ་གསལ་ལྟར་འབྲི་བྱུབ།

$$\frac{x^5}{x^3} = x^2 \quad \frac{x^5}{x^2} = x^3$$

འགྲེལ་བཤད། 2 རྒྱུར་ཚིག་གི་གཞི་ཚ། $5x^4 \times 3x = 15x^5$
 བཤོད་ཚིག་དང་འགྲེལ་བའི་གཞི་ཚ། $15x^5 \div 5x^4 = 3x$, $15x^5 \div 3x = 5x^4$

ང་ཚོས་བཤོད་ཚིག་གི་གཞི་ཚ་འདི་དག་གཤམ་གསལ་ལྟར་འབྲི་བྱུབ།

$$\frac{15x^5}{3x} = 5x^4 \quad \frac{15x^5}{5x^4} = 3x$$

གོང་གི་འགྲེལ་བཤད་དེ་དག་གིས་ཡིག་འབྲུའི་གངས་ཀྱི་སྐབས་སུ་འང་སྟོན་གངས་ཀྱི་སློབ་བཤོལ་འོས་པ་བདུན་སྟོན་
 བྱེད་ཀྱི་ཡོད། དོན་དངོས་སུ་ཡིག་འབྲུའི་གངས་ཀྱིས་གངས་ཁོ་ན་མཚོན་པས་ལག་ལྟར་བྲས་ན་ང་ཚོས་ཁྱེད་ཀྱི་སློབ་བཤོལ་
 ཡིས་ང་ཚོར་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གྲིས་བཤོ་རྒྱུར་གཤམ་གསལ་དེས་སློབ་གཉིས་སྟེར་གྱི་ཡོད།



ངེས་སྒྲིབ། ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གཉིས་ཀྱི་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་འཕུལ་གྲངས་ནི་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་དེ་གཉིས་ཀྱི་འཕུལ་གྲངས་ཀྱི་བཤོས་ཐོབ་དང་མཉམ་པ་ཡིན།

ངེས་སྒྲིབ། ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གཉིས་ཀྱི་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་རྒྱ་གྲངས་ཁག་ནི་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་དེ་གཉིས་ཀྱི་རྒྱ་གྲངས་ཁག་གི་བཤོས་ཐོབ་དང་མཉམ་པ་ཡིན།

4

ཉིས་དཔེ། 1. (ཀ) $-20x^4 \div 10x$ (ཁ) $3y^3 \div \sqrt{3}y$ གཉིས་བཤོ་བར་བྱ།

ལན། (ཀ) $\frac{-20x^4}{10x} = \left(\frac{-20}{10}\right) \left(\frac{x^4}{x}\right) = -2x^3$

(ཁ) $\frac{3y^3}{\sqrt{3}y} = \left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) \left(\frac{y^3}{y}\right) = \sqrt{3}y^2$



མ་ལཱ་ན ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གྱིས་ཚན་མང་ཚུལ་བཤོ་བ།

Division of a Polynomial by a Monomial

ཚན་མང་ཚུལ་ཞིག་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གྱིས་བཤོ་བ་ལ་ཐབས་ལམ་སྟབས་བདེ་གཉིས་ཡོད། ཐབས་ལམ་དང་པོའི་ནང་བཤོད་ཉིས་ནི་གཤམ་གསལ་གོ་རིམ་ལྟར་བྱའོ།

གོ་མ་པ། བཤོ་དགོས་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་ཚན་པ་རྣམས་ལོགས་སུ་དགར་དགོས།

གོ་མ་པ། ཚན་པ་རེ་རེ་བཞིན་ཤེས་པའི་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གྱིས་བཤོ་དགོས།

གོ་མ་པ། བཤོས་ཐོབ་རྣམས་ཚོམ།

ཐབས་ལམ་འདི་ཉིས་དཔེའི་བརྒྱུད་འཛིན་འགྲེལ་བཤད་བྱེད་རྒྱ་ཡིན།

ཉིས་དཔེ། 2. $3y^3 + 15y^2 + 12y$ དེ་ $3y$ ཡིས་བཤོ་དགོས།

གོ་མ་པ། ཤེས་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་ལ་ཚན་པ་གསུམ་ཡོད། དེ་དག་ $3y^3$ དང་ $15y^2$, $12y$ བཅས་རེད།



གོ་ས་པ། 1

ཚན་པ་རེ་རེ་བཞིན་ཤེས་པའི་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་ $3y$ ཡིས་བཞོན།

$$\frac{3y^3}{3y}, \frac{15y^2}{3y}, \frac{12y}{3y} \text{ ཡང་ན། } y^2, 5y, 4 \text{ བཅས་ཐོབ་ཤོ། } |$$

གོ་ས་པ། 2

གོང་གི་བཞོན་ཐོབ་བསྡེམས་པས་ང་ཚོར་དགོས་ངེས་ཚིས་འབྲས་ནི་ $y^2 + 5y + 4$ ལུང་།

$$\text{དེར་བརྟེན། } \frac{3y^3 + 15y^2 + 12y}{3y} = y^2 + 5y + 4$$

མཚན།

བརྒྱུད་རིམ་འདི་ཚོགས་ཐུབ་པ་ཡིན་ན། རྗེད་ལུགས་འདི་བཞིན་གཤམ་གྱི་ཚིས་དཔེ་བཞིན་ཐུང་དུ་གཏོང་བྱུང་།

ཚིས་དཔེ། 3.

$$34x^3 - 17x^2 + 51x \text{ དེ་ } 17x \text{ བཞོས།}$$

ལན།

$$\begin{aligned} \frac{34x^3 - 17x^2 + 51x}{17x} &= \frac{34x^3}{17x} - \frac{17x^2}{17x} + \frac{51x}{17x} \\ &= 2x^2 - x + 3 \end{aligned}$$

ཐབས་ལམ་གཉིས་པ།

ཚབ་ཚིས་ཚུལ་གྱི་བཞོན་གྲངས་ཀྱི་དོན་ནི་ང་ཚོས་ཤེས་ཡོད། ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་བཞོན་གྲངས་ཀྱི་དོན་ཡང་ང་ཚོས་ཤེས་ཡོད། ང་ཚོས་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་གྱིས་བཞོན་དགོས་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་དེ་ལྟེ་ཐུགས་ཏེ་དེའི་ནང་གི་བཞོན་གྲངས་གང་རུང་ཞིག་ཤེས་པའི་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་ཡིན་པ་བཟོས། དེ་རྗེས་བཞོན་ཚིས་ཀྱི་བརྒྱུད་རིམ་ནི་གཤམ་དུ་བརྟེན་པ་བཞིན་སྟབས་བདེར་བྱ་བྱུང་།

ཚིས་དཔེ། 4.

$$4q^3 - 10q^2 + 5q \text{ དེ་ } 2q \text{ བཞོས།}$$

ལན།

$$\begin{aligned} 4q^3 - 10q^2 + 5q &= 2q \times q^2 - 2q \times 5q + 2q \times \left(\frac{5}{2}\right) \\ &= 2q \left(q^2 - 5q + \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{དེར་བརྟེན། } \frac{49^3 - 10q^2 + 5q}{2q} =$$

$$= 2q^2 - 5q + \frac{5}{2}$$

ང་ཚོས་སྤྱི་ཤིང་གྲངས་ $2q$ དེ་མ་ཆ་དང་བྲུ་ཆ་ལས་བསྐྱར་ཏེ་དགོས་མཁོའི་ལན་ཐོབ་ཡོད།



ཤ་ལ་ན ཚན་མང་ཚུལ་ཉིས་ཚན་ཚུལ་གྲིས་བཤོ་བ་སྟེ། དབྱེ་སྤྲུལ་ཐབས་ལམ།

Division of a Polynomial by a Binomial: Factor Method

ད་ཆ་ང་ཚོས་ཚུལ་དཔེ་བཞི་པའི་ཐབས་ལམ་ཚན་མང་ཚུལ་ཉིས་ཚན་ཚུལ་གྲིས་བཤོ་བར་རྒྱ་བསྐྱེད་བྱ་རྒྱུ་ཡིན། ད་བར་ང་ཚོས་བཤོས་ལྷག་ལྷན་ཤོར་ཡིན་པའི་གནས་སྤངས་ཁོ་ན་འགྲེལ་བཟོ་བྱས་ཡོད་པ་དྲན་གསོ་བྱས་དང་། ཤོང་གི་ཚུལ་དཔེ་བཞི་པ་ལྟར། གལ་ཏེ་དབྱེ་སྤྲུལ་བྱེད་ཐུབ་ན། ང་ཚོས་བཤོ་བྱའི་ཚན་མང་ཚུལ་དེ་དབྱེ་སྤྲུལ་བྱས་ཏེ། དེའི་བཤོད་གྲངས་གཅིག་མི་བཤོད་བྱེད་ཉིས་ཚན་ཚུལ་དང་གཅིག་པ་བཟོ་དགོས།

དེ་ནས་ང་ཚོས་སྤྱི་ཤིང་གྲངས་འདོར་བའི་ཐབས་ལམ་སྤྱད་དེ་ལན་འཚོལ་དགོས།

ཚུལ་དཔེ། 5. $a^2 + 4a - 5$ དེ་ $a - 1$ གིས་བཤོས།

ལན།

$$a^2 + 4a - 5 = (a + 5)(a - 1) \quad (\text{སློབ་ཚན་བུམ་པའི་གཏན་མཚུངས་ཀྱི་བཤོལ་པ།})$$

$$\begin{aligned} \text{དེར་བརྟེན།} \quad \frac{a^2 + 4a - 5}{a - 1} &= \frac{(a + 5)(a - 1)}{a - 1} \\ &= a + 5 \end{aligned}$$

ང་ཚོས་སྤྱི་ཤིང་གྲངས་ $a - 1$ དེ་མ་ཆ་དང་བྲུ་ཆ་ལས་དོར་ཏེ་དགོས་མཁོའི་ལན་བཙལ་ཡོད།

མཚན། ཚན་མང་ཚུལ་སྤྱིར་བཏང་རྣམ་པར་འབྲེ་སྐབས་ང་ཚོས་རྒྱ་གྲངས་མཚོན་ཆེད་ x དང་། རྟག་གྲངས་ཆེད་ a, b སོགས་སྤྱོད་གྱི་ཡོད།

གལ་ཏེ་ཐེ་ཚོམ་མེད་ན་སྐབས་ཤེར་རྒྱ་གྲངས་མཚོན་ཆེད་ང་ཚོས་ a སྤྱོད་གྱི་ཡོད།



ཧ་ལ་ལ ཚན་མང་ཚུལ་ཉིས་ཚན་ཚུལ་གྲིས་བཤོ་བ་སྟེ། བཤོད་ཐབས་རིང་པོ།

Division of a Polynomial by a Binomial: Long Division Method

བཤོ་བའི་ཚན་མང་ཚུལ་ནི་ཉག་ཏུ་དབྱེ་ཐུབ་བྱེད་ཐུབ་ཀྱི་མེད་པ་ཁྲིད་རང་ལ་གོ་བ་རུང་ཙམ་སྐྱེས་ཡོད་མིད། ད་ ཚེས་ཚན་མང་ཚུལ་ཉག་ཏུ་ཤེས་པའི་ཉིས་ཚན་ཚུལ་གྲིས་བཤོ་བའི་ཐབས་ལམ་ཞིག་འགྲེལ་བཤད་བྱ་རྒྱུ་ཡིན། ཐབས་ ལམ་འདི་ལ་བཤོད་ཐབས་རིང་པོའི་ཐབས་ལམ་ཟེར།

ང་ཚོས་ཐབས་ལམ་འདི་ཕྱིས་དཔེའི་བརྒྱད་དེ་འགྲེལ་བཤད་རྒྱག་རྒྱུ་ཡིན་ལ། རིལ་གྲངས་ཀྱི་སྐབས་སུ་བཤོ་དགོས་ པའི་རིལ་གྲངས་ལ་བཤོ་བྱ་དང་། གྲངས་གང་གིས་བཤོད་པ་དེ་ལ་བཤོད་བྱེད་ཟེར་བ་དྲན་གསེ་གྲིས་དང་།

ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་སྐབས་སུ་འང་ང་ཚོས་མིང་ཚིག་དེ་རང་སློད་རྒྱུ་ཡིན། མིང་ཚིག་བཤོས་ཐོབ་དང་བཤོས་ལྷག་ ལའང་དོན་དེ་དང་འབྲེ་བ་ཡོད།

ཕྱིས་དཔེ། 6.

$12 - 14x^2 - 13x$ དེ་ $3 + 2x$ ཡིས་བཤོས།

ལན།

ང་ཚོས་བཤོད་ཕྱིས་ཀྱི་བརྒྱད་རིམ་གཤམ་གྱི་ཤོ་རིམ་ལྟར་བྱོའོ།

གོ་མ་པ། 1

ང་ཚོས་བཤོ་བྱ་ $(12 - 14x^2 - 13x)$ དང་བཤོད་བྱེད་ $(3 + 2x)$ ཚད་ཟུན་མཐུང་པར་འབྲེའོ།

བཤོ་བྱ། $-14x^2 - 13x + 12$ བཤོད་བྱེད། $2x + 3$

གོ་མ་པ། 2

ང་ཚོས་བཤོ་བའི་ཚན་པ་དང་པོ་བཤོད་བྱེད་ཀྱི་ ཚན་པ་དང་པོས་བཤོས་ཡོད། ང་ཚོས་ $-14x^2$ དེ་ $2x$ ཡིས་བཤོས་ཏེ་ $-7x$ ལྷུང་། འདི་ལིས་ བཤོད་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོ་ལྟར་ཀྱི་ཡོད།

$$\begin{array}{r|l} \frac{-14x^2}{2x} & 2x \overline{) \begin{array}{r} -7x \\ -14x \\ \hline -14x^2 \\ \hline 0 \end{array} \\ \hline = -7x & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{བཤོས་ཐོབ} \\ \\ \\ = -7x \end{array} \end{array}$$

གོ་མ་པ། 3

ང་ཚོས་བཤོད་བྱེད་དང་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་དང་ པོ་བསྐྱར་ནས་བསྐྱར་ཐོབ་བཤོ་བྱ་ལས་འཐེན། དེ་ ཞིང་ཚོས་ $2x + 3$ དང་ $-7x$ བསྐྱར་བ་དང་།

$$\begin{array}{r|l} (2x + 3) \times (-7x) & \begin{array}{r} -14x^2 - 13x + 12 \\ -14x^2 - 21x \\ \hline 8x + 12 \end{array} \\ \hline = -14x - 21x & \end{array}$$



བརྒྱུར་ཐོབ་- $14x^2 - 13x + 12$ ནས་འཕྲུལ། འདི་ཡིས་ང་ཚོར་
བཞོན་སྟེང་གི་ $8x + 12$ བྱུང་།

གོ་མ་པ། ༤

གོང་གི་བཞོན་སྟེང་གི་ $8x + 12$ དེ་བཞོན་གསར་པ་ལ་ཆ་འཛིན་བྱ་བ་དང་།
བཞོན་བྱེད་རང་འཇགས་རེད། ང་ཚོས་གོ་རིམ་གཉིས་པ་བརྒྱུར་སློབ་བྱས་
ཏེ་བཞོན་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་རྗེས་མ་དེ་ཐོབ་ཀྱི་ཡོད། དེ་ནི་ང་ཚོས་བཞོན་བྱེད་
ཚན་པ་དང་པོ་($8x$) དེ་བཞོན་བྱེད་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོ་($2x$) ཡིས་བཞོན་
ཏེ་བྱུང་། དེ་ནས་བཞོན་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་གཉིས་པ་4 རེད།

$$\frac{8x}{2x} = 4 \quad \left| \begin{array}{l} \text{བཞོན་ཐོབ་} \\ -7x+4 \end{array} \right.$$

གོ་མ་པ། ༥

ད་ལྟ་ཐོབ་པའི་བཞོན་སྟེང་གི་ཚན་པ་དང་བཞོན་བྱེད་སྐྱུར་ནས་བརྒྱུར་ཐོབ་
བཞོན་བྱེད་ལ་འཕྲུལ། དེ་ནི་ང་ཚོས་ $2x + 3$ དང་4 བརྒྱུར་ན་བརྒྱུར་ཐོབ་
 $8x + 12$ དེ་བཞོན་བྱེད་ $8x + 12$ ལས་འཕྲུལ། འདི་ཡིས་ང་ཚོར་བཞོན་
སྟེང་0 བྱུང་།

$$(2x + 3) \times 4 \left| \begin{array}{l} 8x + 12 \\ 8x + 12 \\ \hline 0 \end{array} \right.$$

གོ་མ་པ། ༦

དེར་བརྟེན། བཞོན་ཐོབ་ཚ་ཚང་- $7x + 4$ དང་བཞོན་སྟེང་ལྷན་ཁྲུང་འདྲིའི་
དེར་བརྟེན། $(-14x - 13x + 12) \div (2x + 3) = -7x + 4$
གོང་གི་བརྒྱུད་རིམ་ནི་གཤམ་དུ་མིག་སློན་བྱས་ཡོད།

$$\begin{array}{r} -7x + 4 \\ \hline 2x + 3 \left) \begin{array}{l} -14x^2 - 13x + 12 \\ -14x^2 - 21x \\ \hline + + 21x + 12 \\ 8x + 12 \\ 8x + 12 \\ \hline - - \\ 0 \end{array} \end{array}$$

དོ་སྣང་བྱ་རྒྱུར། $-14x^2 - 13x + 12 = (2x + 3)(-7x + 4)$ (1)

དེ་ནི། བཞོན་བྱེད་ = བཞོན་བྱེད་ \times བཞོན་ཐོབ།

དེར་བརྟེན། ང་ཚོས་འབྲེལ་བ་(1) པོ་ལས་($2x + 3$) དང་ ($-7x + 4$) གཉིས་ཀྱི་རྒྱུ་- $14x^2 - 13x + 12$
ཀྱི་བཞོན་གྲངས་ཡིན་པ་མཐོང་བྱུང། བཞོན་སྟེང་གི་གཞན་ཞིག་ནི། ཚུས་དཔེ་འདིའི་བཞོན་བྱེད་དང་བཞོན་ཐོབ་གཉིས་
ཀ་བཞོན་བྱེད་བཞོན་གྲངས་རེད། དེ་ལྟར་ང་ཚོས་ཚུས་དཔེ་གཞན་ཞིག་ལ་བརྟེན་ན།



ཕྱི་སྲིད་པ། 7. $2 + 7x + 7x^2 + 2x^3$ དེ་ $1 + 2x$ ཡིས་བཞོམས།

ལན། ང་ཚོས་བཞོད་ཕྱི་སྲིད་ཀྱི་བརྒྱུད་རིམ་གཤམ་གྱི་གོ་རིམ་བཞིན་བྱེད། །

གོམ་པ། 1 ང་ཚོས་བཞོད་བྱ་($2 + 7x + 7x^2 + 2x^3$) དང་བཞོད་བྱེད་($1 + 2x$) ཚད་ཇུན་ནམ་པར་འབྲི་དགོས།
 བཞོད་བྱ། = $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2)$ བཞོད་བྱེད། = $(2x + 1)$

གོམ་པ། 2 ང་ཚོས་བཞོད་བྱེད་ཚན་པ་དང་པོ་བཞོད་བྱེད་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོས་བཞོད་དགོས་ཏེ། $2x^3$ དེ་ $2x$ ཡིས་བཞོམས་ན་ x^2 འབྱུང་། འདི་ $\frac{2x^3}{2x} = x^2$ བཞོམས་ཐོབ་ $= x^2$ ཡིས་བཞོམས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོ་ x^2 འབྱུང་།

གོམ་པ། 3 ང་ཚོས་བཞོད་བྱེད་དེ་བཞོམས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོས་བསྐྱར་ནས་བསྐྱར་ཐོབ་བཞོད་བྱ་ལས་འཐེན། དེ་ནི་ང་ $(2x + 1) \times x^2$ $\left| \begin{array}{r} 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 \\ 2x^3 + x^2 \\ \hline 6x^2 + 7x + 2 \end{array} \right.$ ཚོས་ $2x + 1$ དང་ x^2 བསྐྱར་རྗེས་བསྐྱར་ཐོབ་ $2x^3 + x^2$ དེ་བཞོད་བྱ་ $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ ལས་འཐེན།
 ང་ཚོར་བཞོམས་ལྷག་ $6x^2 + 7x + 2$ བྱུང་།

གོམ་པ། 4 བོང་གི་བཞོམས་ལྷག་ $6x^2 + 7x + 2$ དེ་བཞོད་བྱ་གསར་པ་ལ་ཆ་འཛིན་བྱ་བ་དང་བཞོད་བྱེད་རང་འཇགས་རེད། ང་ཚོས་བོམ་པ་གཉིས་པ་བསྐྱར་རྗེས་བྱས་ཏེ་བཞོམས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་རྗེས་མ་དེ་ཐོབ་ཀྱི་ཡོད། དེ་ནི་ང་ཚོས་བཞོད་བྱེད་ཚན་པ་དང་པོ་ $(6x^2)$ དེ་བཞོད་བྱེད་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོ་ $(2x)$ ཡིས་བཞོམས་ན་ $3x$ འབྱུང་། འདི་ནི་བཞོམས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་གཉིས་པ་ $3x$ རེད།

གོམ་པ། 5 ད་ལྟ་ཐོབ་པའི་བཞོམས་ལྷག་གི་ཚན་པ་དང་བཞོད་བྱེད་བསྐྱར་ནས་བཞོད་བྱ་ལས་འཐེན། དེ་ནི། $(2x + 1)$ དང་ $3x$ བསྐྱར་ན་ $(2x + 1) \times 3x$ $\left| \begin{array}{r} 6x^2 + 7x + 2 \\ 6x^2 + 3x \\ \hline 4x + 2 \end{array} \right.$ བསྐྱར་ཐོབ་ $6x^2 + 3x$ བྱུང་། དེ་བཞོད་བྱ་ $6x^2 + 7x + 2$ ལས་འཐེན་ན་ $4x + 2$ བྱུང་།

གོ་མ་པ། ༤ བོང་གི་བཤོས་ལྷག་དེ་ང་ཚོས་བཤོ་བྱ་གསལ་མ་ལ་ཆ་འཛིན་བྱ་བ་དང་བཤོད་
 བྱེད་རང་འཇགས་རེད། ང་ཚོས་བོ་མ་པ་གཉིས་པ་བསྐྱར་སློབ་བྱས་ཏེ་བཤོས་ $\frac{4x}{2x}$ | བཤོས་ཐོབ་
 ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་རྗེས་མ་དེ་ཐོབ་ཀྱི་ཡོད། དེ་ནི་ང་ཚོས་བཤོ་བྱེད་ཚན་པ་དང་ = 2 | $x^2 + 3x + 2$
 པོ་(4x) དེ་བཤོད་བྱེད་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོ་(2x) ཡིས་བཤོས་ན་2 བྱང་
 ལ། དེ་ནི་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་རྗེས་མ་དེ་རེད།

གོ་མ་པ། ༥ ད་ལྟ་ཐོབ་པའི་བཤོས་ལྷག་གི་ཚན་པ་དང་བཤོད་བྱེད་བསྐྱར་ནས་བསྐྱར་
 ཐོབ་བཤོ་བྱ་ལས་འབྲེན། དེ་ནི་ང་ཚོས་ $2x + 1$ དང་2སྐྱར་ $(2x + 1) \times 2$ | $\frac{4x + 2}{4x + 2}$
 བསྐྱར་བཤོ་བྱ་ $4x + 2$ དེ་བཤོ་བྱ་ $4x + 2$ ལས་འབྲེན། འདི་ཡིས་ = $4x + 2$ | $\frac{4x + 2}{4x + 2}$
 བཤོས་ལྷག་ལྷན་ཀོར་བྱང་། 0

གོ་མ་པ། ༦ དེས་ན་བཤོས་ཐོབ་ཆ་ཚང་ $x^2 + 3x + 2$ དང་བཤོས་ལྷག་ལྷན་ཀོར་རེད།
 དེར་བརྟེན། $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) \div (2x + 1) = x^2 + 3x + 2$
 བོང་གི་བརྒྱུད་རིམ་ནི་གཤམ་དུ་བསྐྱར་ན་འདི་ལྟར།

$$\begin{array}{r}
 \overline{) x^2 + 3x + 2} \\
 2x + 1 \overline{) 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2} \\
 \underline{2x^2 + + 2} \\
 6x^2 + 7x + 2 \\
 \underline{6x^2 + 3x} \\
 4x + 2 \\
 \underline{4x + 2} \\
 0
 \end{array}$$

དོ་སྣང་བྱ་རྒྱུར། $(2x^3 + 7x^2 + 7x + 2) = (2x + 1)(x^2 + 3x + 2)$ (1)

དེ་ནི། བཤོ་བྱ་ = བཤོད་བྱེད་ × བཤོས་ཐོབ།

དེར་བརྟེན། ང་ཚོས་འབྲེལ་བ་(1) དང་པོ་ལས། $(2x + 1)$ དང་ $(x^2 + 3x + 2)$ གཉིས་ཀ་ $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ ཀྱི་བཤོད་གངས་ཡིན་པ་ཤེས་ཡོད། རྩོགས་གཞན་ནས་བཤད་ན། **ཕྱིས་དཔེ་འདིའི་བཤོད་བྱེད་དང་**
བཤོས་ཐོབ་གཉིས་ཀ་ཡང་བཤོ་བྱེད་བཤོད་གངས་རེད།



རིམ་གྲངས་སྐབས་ཀྱི་གཤམ་གསལ་མངུག་འབྲས་དེ་ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་སྐབས་སྲུང་བདེན་པ་ཡིན་པ་གོང་གི་ཕྱིས་
 དཔེ་གཉིས་ཀྱིས་གོ་བདེ་སྤྲད་ཡོད་ལ། གལ་ཏེ་རིམ་གྲངས་ m ཞིག་ལྡད་ཀོར་མ་ཡིན་པའི་རིམ་གྲངས་ n ཀྱིས་བགོས་ཏེ་
 བགོད་ལྷག་ 0 དང་། བགོས་ཐོབ་ q བྱུང་ན། $m = nq$ རེད། དེར་བརྟེན། n རི་ m ཀྱི་བགོད་གྲངས་རེད།

ཚོག་གཞན་གྱིས་བརྗོད་ན། གལ་ཏེ་བགོས་ལྷག་ 0 ཡིན་ན།

$$\text{བགོ་བྱ} = \text{བགོད་བྱེད} \times \text{བགོས་ཐོབ}$$

དེར་བརྟེན། ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་སྐབས་སྲུ། གལ་ཏེ་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ $f(x)$ དེ་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ $g(x)$ ཡིས་བགོས་
 ཏེ། བགོས་ལྷག་ 0 དང་བགོས་ཐོབ་ $q(x)$ བྱུང་ན། $f(x) = g(x)q(x)$ རེད། དེར་བརྟེན་ $g(x)$ རི་ $f(x)$ ཡི་
 བགོད་གྲངས་རེད།

ཚོག་གཞན་གྱིས་བཤད་ན། ཚན་མང་ཚུ་ལ་གྱི་སྐབས་སྲུང་།

$$\text{གལ་ཏེ་བགོས་ལྷག་ 0 ཡིན་ན།} \quad \text{བགོ་བྱ} = \text{བགོད་བྱེད} \times \text{བགོས་ཐོབ}$$

མཚན།

- ༡། བགོ་བྱ་དང་། བགོད་བྱེད། བགོས་ཐོབ་བཅས་ཀྱི་གོང་གི་འབྲེལ་བ་ནི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ཞིག་ཚན་མང་ཚུ་ལ་གཞན་འགའི་བགོད་གྲངས་
 ཡིན་མིན་ཐག་གཅོད་བྱ་རྒྱུར་ཕན་ཐོགས་ཆེན་པོ་ཡོད།
- ༢། གལ་ཏེ་བགོས་ལྷག་ལྡད་ཀོར་ཡིན་ན། བགོད་བྱེད་ཙམ་མིན་པར་བགོས་ཐོབ་ཀྱང་བགོ་བྱའི་བགོད་གྲངས་རེད།
- ༣། གོམ་རིམ་ནམས་གོ་སྤྲོ་བའི་ཆེད་དུ་བྲིས་པ་ལས། དོན་དངོས་ཐོག་ཞིབ་ཏུ་བྲིས་པ་རེ་རེ་བྲིས་ནས་འབྲི་མི་དགོས། དུས་རྒྱུན་ང་
 ཚོས་བགོད་ཕྱིས་ནི་ཕྱིས་དཔེ་རྗེས་མའི་ནང་བསྟན་པ་བཞིན་བྱ་ཚོག་གོ།

ཕྱིས་དཔེ། 8. $6x + 5$ དེ་ $6x^2 - 7x - 10$ ཡི་བགོད་གྲངས་ཡིན་མིན་ལྟོས།

ལན། $6x + 5$ ཡིས་བགོད་ན་འདི་ལྟར།

$$\begin{array}{r}
 6x + 5 \overline{) 6x^2 - 7x - 10} \\
 \underline{6x^2 + 5x} \\
 - 12x - 10 \\
 \underline{- 12x - 10} \\
 0
 \end{array}$$

བགོས་ལྷག་ལྡད་ཀོར་མིན་སྐབས་ $6x + 5$ རི་ $6x^2 - 7x - 10$ ཡི་བགོད་གྲངས་རེད།





སློབ་ཚན། 7.1



༡། ག་གམ་གསལ་ཚུ་ལ་ནམས་ལས་གང་དང་གང་ཚན་མང་ཚུ་ལ་མིན་པ་ཚོ་ལ།

༧༧) $3z - \sqrt{5}z + 9$

༧༩) $3\sqrt{z} + 4z + 5z^2$

ག༧) $\sqrt{ax} + x^2 - x^3$

ང) $\sqrt{ax^2} + ax - 9x^2 + 5$

ཅ) $2x^{-2} + 3x^{-2} + 4 + 5x$

ཆ) $x^2 + x^{-2}$

ག་གམ་གྱི་ཚན་མང་ཚུ་ལ་ནམས་ཚད་ལྡན་ནམ་པར་བྲིས། དེ་དག་གི་ཐོངས་གྲངས་ཡང་བྲིས།

༣༧) $y^2 + 6y + 9 + 4y^2$

༣༩) $4q^2 - 13q^5 + 12q$

༤༧) $\left(z + \frac{3}{4}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)$

༤༩) $(x^2 + 4)(x^2 + 9)$

༤༧) $y^2 + 12 - 5y^8$

༥༧) $q^2 + 4q^8 - q^6$

༦༧) $p^2 + 16 + p^7$

༦༩) $y^2 + y^3 - \frac{5}{7}y^{11}$

༧༠) $(z^3 - 14)(z^3 - 1)$

༧༡) $(z^3 - 1)(z^3 - 8)$

༧༣) $(y^3 - 2)(z^3 + 11)$

༧༣) $\left(x^3 - \frac{3}{8}\right)\left(x^3 + \frac{16}{17}\right)$

ག་གམ་གསལ་བཞོད་རྩིས་རྒྱུ་ལ།

༧༤) $2x$ གྲིས་ $2x^2$

༧༥) x^2 གྲིས་ $-3x^3$

༧༦) x ཡིས་ $\frac{2}{3}x^2$

༧༦) $5x^2$ གྲིས་ $\sqrt{5}x^4$

༧༧) $2a$ གྲིས་ $\sqrt{3}a^3$

༧༧) $-2\sqrt{2}a^2$ གྲིས་ $4a^4$

༧༠) $2x$ གྲིས་ $x + 2x^2 + 3a^3$

༧༡) $3y$ ཡིས་ $y^4 - 3y^3 + \frac{1}{2}y^2$

༧༣) $2p$ ཡིས་ $-4p^3 + 4p^2 + p + 4$

༧༣) $\sqrt{2}x^2$ ཡིས་ $-x^4 + x^2$

༧༤) $2z$ ཡིས་ $5z^3 - 6z^2 + 7z$

༧༤) $3q^2$ ཡིས་ $\sqrt{3}q^4 + 2\sqrt{3}q^3$





161 བཤོད་ཐབས་རིང་པོ་སྤྱད་དེ་བཤོད་དགོས། དབྱེ་ཕྱེལ་གྱི་ཐབས་ལམ་བཀོལ་ཏེ་བཤེར་ཅིས་ཚོུབ།

ཀ) $x + 4$ ཡིས་ $x^2 + 6x + 8$

ཁ) $x + 5$ ཡིས་ $x^2 + 7x + 10$

ག) $y - 4$ ཡིས་ $y^2 - y - 12$

ང) $y - 2$ ཡིས་ $y^2 - 5y + 6$

ཅ) $z - 5$ ཡིས་ $z^2 - 8z + 15$

ཆ) $x^2 + 2$ ཡིས་ $x^4 + 3x^2 + 2$

[བད་སྟོན། $x^2 = y$ ལྟར་བྲིས།]

162 བཤོས་ཐོབ་ལྗང་ཀོར་ཡིན་པར་བརྟམ་ཏེ་ཤེས་པའི་ཉེས་ཚན་ཚུལ་དེ་ཤེས་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་བཤོད་གྲངས་ཡིན་པའི་བཤེར་ཅིས་ཚོུབ།

ཀ) $2x + 3$, $2x^2 + 5x + 3$

ཁ) $2x + 1$, $6x^2 + x - 1$

ག) $2y - 1$, $8y^2 - 2y - 1$

ང) $2y - 1$, $8y^2 - 2y - 1$

ཅ) $2b - 1$, $-3b^2 + 13b - 4$

ཆ) $p^2 + 3$, $4p^4 + 7p^2 - 15$



163 ཚན་མང་ཚུལ་ཚན་མང་ཚུལ་གྱིས་བཤོད་པ་སྟེ། བཤོས་ལྷག་ལྗང་ཀོར་མིན་པ།

Division of a Polynomial by a Polynomial: Non-zero Remainder

ད་ལྟ་བར་དུ་ང་ཚོས་ཚན་མང་ཚུལ་ཞིག་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་ལམ་ཡང་ན་ཉེས་ཚན་ཚུལ་གྱིས་བཤོས་ཏེ་བཤོས་ལྷག་མེད་པའི་(བཤོས་ལྷག་ལྗང་ཀོར་བྱུང་བ།) གནས་སྐབས་དེ་ལྟར་ཡོད།

སྤྱིར་བཏང་གྲངས་ཀྱི་བཤོས། ང་ཚོས་འབྲེལ་ཡོད་ཚན་རྒྱུང་ཚུལ་ལམ་ཉེས་ཚན་ཚུལ་གྱིས་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་ཕྱི་ཕྱོད་པོར་བཤོ་རུང་བེད། ད་ཆ་ང་ཚོས་བཤོས་ལྷག་ལྗང་ཀོར་མིན་པའི་གནས་སྐབས་ཁོ་ནར་བརྟམ་རྒྱུ་ཡིན།

གྲངས་ཀྱི་སྐབས་སུ་ང་ཚོས་བཤོད་ཅིས་ནི་བཤོས་ལྷག་བཤོད་གྲངས་ལས་ཆུང་བ་མ་ཐོབ་བར་ལུ་མཐུད་དུ་བྲུས་ཡོད་པ་དྲན་གསོ་གིས་དང་། ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་སྐབས་སུ་ང་ཚོར་ཚན་མང་ཚུལ་ཞིག་གཞན་ཞིག་ལས་ཆུང་བ་བེད་པའི་གོ་དོན་དེ་མེད། དེའི་ཚབ་དུ་ང་ཚོས་བཤོད་གྲངས་དང་ལྷག་གྲངས་ཀྱི་ཐེངས་གྲངས་བརྒྱུར་གྱི་ཡོད། ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་ཐེངས་གྲངས་ནི་རིལ་གྲངས་ཡིན་པས་ང་ཚོས་དེ་དག་བརྒྱུར་བྱུང།





ང་ཚོས་བཤོད་ཚིས་ཀྱི་བརྒྱད་རིམ་ནི་བཤོད་ལྷག་གི་ཐོངས་གུངས་བཤོད་བྱེད་ཀྱི་ཐོངས་གུངས་ལས་ཚུང་བ་མ་
 ཐོབ་པར་ལུ་མཐུད་བྱ་དགོས། ང་ཚོས་བརྒྱད་རིམ་དེ་དག་ཚིས་དཔེ་བརྒྱད་འགྲེལ་བཤད་བྱ་རྒྱ་ཡིན།

ཚིས་དཔེ། 9.

ཚན་མང་ཚུལ་ $5x(x^2 - x + 1) - (9 + 4x^4)$ འདི་བཞིན་ $4x - 1$ ཡིས་བཤོས།

ལན། ཚད་ལྡན་ནམ་པར་བྲིས་ན་འདི་ལྟར། $5x(x^2 - x + 1) - (9 + 4x^4)$

$$= 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 - 4x^4$$

$$= -4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9$$

ད་ཆ་ང་ཚོས་ལེ་ཚན་གོང་མར་འགྲེལ་བཤོད་བྱེད་པ་བཞིན་བཤོད་ཚིས་རྒྱག་རྒྱ་ཡིན།

$$\begin{array}{r}
 \overline{-x^3 + x^2 - x + 1} \\
 4x - 1 \left) \begin{array}{r} -4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 \\ -4x x^3 \\ \hline 4x^3 - 5x^2 + 5x - 9 \\ -4x^3 x^2 \\ \hline -4x^2 + 5x - 9 \\ 4x^2 x \\ \hline 4x - 9 \\ -4x 1 \\ \hline -8 \end{array}
 \end{array}$$

(བཤོས་ལྷག་གི་ཐོངས་གུངས་བཤོད་བྱེད་ཀྱི་ཐོངས་གུངས་
 ལས་ཚུང་བ་མིན་པས་བཤོད་ཚིས་ལུ་མཐུད་བྱེད་དགོས།)

(གོང་ལྟར་བྲིས།)

(གོང་ལྟར་བྲིས།)

(བཤོས་ལྷག་གི་ཐོངས་གུངས་བཤོད་བྱེད་ཀྱི་ཐོངས་
 གུངས་ལས་ཚུང་བས་བཤོད་ཚིས་མཚམས་ཞིག)

དེར་བརྟེན། བཤོས་ཐོབ་ནི། $-x^3 + x^2 - x + 1$ དང་། བཤོས་ལྷག་ནི་ -8 རེད།

གོང་གི་ཚིས་དཔེའི་ནང་། $-4x^4 + 5x^3 - 5x^2 + 5x - 9 = (4x - 1) \times (-x^3 + x^2 - x + 1) (-8)$
 ཡིན་པ་ཞིབ་བཤེར་བྱུང་ཡོད་དོ། །

ཚིག་གཞན་གྱིས་བཤད་ན།

$$\text{བཤོད་བྱ་} = \text{བཤོད་བྱེད་} \times \text{བཤོས་ཐོབ་} + \text{བཤོས་ལྷག}$$

ཉེས་དཔེ། 10. ཚན་མང་ཚུ་ལ་ $3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2$ དེ་ $3y^2 - 1$ ཡིས་བཞོམ་

ལན། ང་ཚོས་ལེ་ཚན་གོང་མར་འགྲེལ་བཅོལ་བཞུགས་པ་ལྟར་བཞོད་ཉེས་རྒྱག་རྒྱུ་ཡིན།

$$\begin{array}{r}
 y - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3} \\
 3y^2 - 1 \overline{) 3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2} \\
 \underline{- 3y^4} \\
 + y^3 + 12y^2 + 2 \\
 \underline{- y^3} \\
 + 13y^2 + 2 \\
 \underline{- 13y^2} \\
 + 2 \\
 \underline{- 2} \\
 0
 \end{array}$$

(བཞོམ་སྒྲག་གི་སྐོར་གྲངས་བཞོད་ཀྱི་སྐོར་གྲངས་
ལས་ཚུང་བ་མིན་པས་བཞོད་ཉེས་ལྷན་མཐུན་ཀྱང་དཔོན།)

(གོང་ལྟར་བྱོས།)

(གོང་ལྟར་བྱོས།)

(བཞོམ་སྒྲག་གི་སྐོར་གྲངས་བཞོད་ཀྱི་སྐོར་གྲངས་
གྲངས་ལས་ཚུང་བས་བཞོད་ཉེས་མཚམས་ཞིག།)

དེར་བརྟེན། ང་ཚོས་ $3y^2 - 1$ ཡིས་ $3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2$ བཞོམ་པ་ཡིན་ན། ང་ཚོར་བཞོམ་སྐོར་
 $y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3}$ དང་། བཞོམ་སྒྲག་ $-\frac{1}{3}y + \frac{19}{3}$ བྱུང་།

འདིར་གསལ་པོར་མཐོང་བྱུང་བ་ཞིག་ལ།

$$3y^4 - y^3 + 12y^2 + 2 = (3y^2 - 1) \times \left(y - \frac{1}{3}y + \frac{13}{3} \right) + \left(-\frac{1}{3}y + \frac{19}{3} \right) \text{ ཡིན་ནོ། }$$

ཚིག་གཞན་གྱིས་བཤད་ན།

$$\text{བཞོད་བྱ་} = \text{བཞོད་ཀྱི་བྱ་} \times \text{བཞོམ་སྐོར་} + \text{བཞོམ་སྒྲག་}$$

དོན་དངོས་སུ་ཉེས་འབྲས་འདི་ནི་ཉེས་ཀྱི་དེ་རང་དེས་པ་དང་། རྒྱ་མཚན་ནི་གལ་ཏེ་ང་ཚོས་ (བཞོད་བྱ་ - བཞོམ་
སྒྲག་) བཞོད་ཀྱི་བྱ་བཞོམ་ན། དེའི་བཞོམ་སྒྲག་ནི་མྱད་ཀོར་འོང་གི་ཡོད། དེས་ན། ལེ་ཚན་གོང་མའི་ནང་བྱུང་
བ་ལྟར།



$$\text{བཞོ་བྱ་} - \text{བཞོས་ལྷག} = \text{བཞོད་བྱེད་} \times \text{བཞོས་ཐོབ།}$$

$$\text{ཡང་ན་ བཞོ་བྱ་} = \text{བཞོད་བྱེད་} \times \text{བཞོས་ཐོབ་} + \text{བཞོས་ལྷག}$$

མཚན།

ཤེས་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་གཉིས་ལས་གང་ཞིག་གཞན་དེའི་བཞོས་གངས་ཡིན་མིན་ཐག་གཅོད་བྱ་རྒྱུར་གོང་གི་འབྲེལ་བ་དེ་ང་ཚོར་ཕན་ཐོགས་ཚུན་པོ་ཡོད། གལ་ཏེ་བཞོས་ལྷག་ལྷད་ཀོར་ཡིན་ན། བཞོད་བྱེད་དང་བཞོས་ཐོབ་གཉིས་ཀྱི་བཞོ་བྱའི་བཞོད་གངས་མིན།

ང་ཚོས་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་བཞོད་ཐབས་རིང་བའི་སྐབས་ཀྱི་དོན་དག་གལ་ཚེན་ན་མས་ཐོ་འགོད་བྱའོ། །

- ༡) བཞོད་ཚུལ་མ་བརྒྱབ་གོང་། བྱེད་ཚོས་བཞོ་བྱ་དང་བཞོད་བྱེད་ཚད་ལྡན་ན་མ་པར་བྱི་དགོས། དེ་ནི་བཞོ་བྱ་དང་བཞོད་བྱེད་ཀྱི་ཚན་པ་ན་མས་ཀྱི་རྒྱ་ཡི་སྟོན་གངས་ཆགས་རིམ་ལྡར་སྐྱེག་དགོས།
- ༢) བཞོད་ཚུལ་རྒྱག་པའི་བརྒྱུད་རིམ་སྐབས་ཚན་མཐུན་ན་མས་གཅིག་འོག་གཞན་འཁེལ་བ་འབྱི་དགོས། དེའི་དོན་དུ་གོམ་པ་ཚང་བའི་སྐབས་ཚན་པ་མི་ཚང་བའི་སར་བར་སྟོང་འཛོག་དགོས།
- ༣) བཞོས་ལྷག་གི་ཐངས་གངས་བཞོད་བྱེད་ཀྱི་ཐངས་གངས་ལས་ཚུང་བ་མ་ཐོབ་པར་བཞོད་བཅི་མུ་མཐུད་བྱ་དགོས།
- ༤) བཞོས་ལྷག་གི་ཐངས་གངས་བཞོད་བྱེད་ཀྱི་ཐངས་གངས་ལས་ཚུང་བ་ཡིན་ཚེ་བཞོད་བཅི་མཚམས་འཛོག་གིས། འདི་ནི་དགོས་མཁའི་བཞོས་ལྷག་རེད།
- ༥) གལ་ཏེ་བཞོས་ལྷག་ལྷད་ཀོར་ཡིན་ན། བཞོད་བྱེད་ནི་བཞོ་བྱའི་བཞོད་གངས་རེད། དེར་བརྟེན། ཤེས་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་ $f(x)$ ཞིག་ཚན་མང་ཚུལ་གཞན་ $g(x)$ ཡི་བཞོད་གངས་ཡིན་མིན་བཟོ་རྒྱུར། ང་ཚོས་ $f(x)$ དེ་ $g(x)$ ཡི་བཞོ་བ་དང་དེའི་བཞོད་ལྷག་ལ་བརྟེན། གལ་ཏེ་བཞོས་ལྷག་ལྷད་ཀོར་ཡིན་ན་ $f(x)$ ནི་ $g(x)$ ཡི་བཞོད་གངས་རེད། དེ་མིན་བཞོད་གངས་མ་རེད།





ལ་ལ་ཉ བཤོད་ཐབས་རིང་པོའི་འགྲེལ་ཚུལ་ལྷུག་པོ་དང་ཐུང་བ།

A Quick and Short Version of Long Division

ང་ཚོས་བཤོད་ཐབས་རིང་པོའི་ཐབས་ལམ་ཐུང་དུ་གཞན་ཞིག་གསལ་དུ་བརྟན་རྒྱ་ཡིན། ང་ཚོས་ $x^3 + 4x^2 - 3x - 7$ དེ་ $x - 3$ ཡིས་བཤོ་བར་ཆ་ཞོག། བཤོད་དགོས་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་དེ་ཐིག་གོང་མའི་སྟེང་གིས་ཉེ་ཡིག་སྟེང་གཅིག་གི་སྟོང་ཆ་ཞོག། གཡལས་སུ་བརྟན་པ་བཞེན་ཐིག་དེའི་འོག་བཤོད་བྱེད་སྟེང་ས་གསུམ་གྱིས་ཉེ་དེའི་དབར་གངས་ཀྱི་འཕུལ་གངས་ཆེད་སྟོང་ཆ་ཞོག།

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ \hline (x-3) (x-3) (x-3) \end{array}$$

ནམ་རྒྱུན་སྟོད་པའི་ཐབས་ལམ་ལྟར། ང་ཚོས་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་དང་པོ་བརྩིས་ན། ལྷན་པས་འདིར་ x^2 རེད། ཐིག་འོག་མའི་ $(x - 3)$ དང་པོ་དེ་ x^2 དང་བསྟུར་ཉེ་བསྟུར་ཐོབ་སྟོང་ཆའི་ནང་གིས། x^3 ཅན་གྱི་ཚན་པ་བཅོལ་བཞེན་པས། x^2 ཡི་ཚན་པ་དངོས་ཡིད་ཐོབ་པར་ང་ཚོས། ཡིག་སྟེང་བར་མར་ $7x^2$ གིས། (དེ་དང་ $-3x^2$ མཉམ་ $4x^2$ བཤོ་བྱར་ཐོབ།) $7x^2$ ལས་ང་ཚོར་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་གཉིས་པ་ $7x$ བྱང་། ཐིག་འོག་མའི་ $(x - 3)$ གཉིས་པའི་མདུན་དུ་ $7x$ གིས། བསྟུར་ཐོབ་ $(7x^2 - 21x)$ དེ་ཐིག་བར་མའི་ནང་གིས་ཉེ་ $7x^2$ ལ་སྟོང་ས།

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ (x^3 - 3x^2) + (7x^2) \\ \hline x^2(x-3) (x-3) (x-3) \end{array}$$

དེ་ནས་ཡིག་སྟེང་བར་མའི་ནང་($18x$ གིས་ཉེ་ x ཅན་ཚན་པ་སྟོམས། འདི་ཡིས་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་ཚན་པ་རྗེས་མའི་ 18 བྱང་།

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ (x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x) \\ \hline x^2(x-3) + 7x(x-3) (x-3) \end{array}$$

ཐིག་འོག་མའི་ $(x - 3)$ མཐའ་མ་དེ་ 18 ཀྱིས་

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ (x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x) + (18x) \\ \hline x^2(x-3) + 7x(x-3) (x-3) \end{array}$$

བསྟུར་ཉེ་བསྟུར་ཐོབ་ཡིག་སྟེང་བར་མའི་ནང་གིས། མཐའ་མར་ཉལ་གངས་སྟོམས་པའི་ཆེད་ཡིག་སྟེང་བར་མར་ 47 གིས། ཚན་པ་འདི་ནི་བཤོས་ལྷུག་རེད། མཐའ་མའི་རྩིས་འབྲས་ནི་གཡལས་སུ་བརྟན་ཡིད།

$$\begin{array}{r} x^3 + 4x^2 - 3x - 7 \\ (x^3 - 3x^2) + (7x^2 - 21x) + (18x - 54) + 47 \\ \hline x^2(x-3) + 7x(x-3) + 18(x-3) \end{array}$$





དེར་བརྟེན། བཤོས་ཐོབ་ནི་ $x^2 + 7x + 18$ (འོག་ཐིག་ཉིས་བརྟེན་གྱིས་བརྟེན་ཡོད།) ཡིན་པ་མ་ཟད།
བཤོས་ལྷག་ནི་47 རེད།



སློབ་ཚན། 7.2



ཚན་མང་ཚུལ་དང་པོ་དེ་གཉིས་པས་བཤོས། བཤོས་ཐོབ་དང་བཤོས་ལྷག་བྲིས།

༡། $3a^2 + 5a + 7, a + 2$

༣། $10b^2 + 7b^5 + 8, 5b - 3$

༢། $6p^3 + 5p^2 + 4, 2p + 1$

༤། $8q^3 + 6q^2 + 4q - 1, 4q + 2$

༣། $12x^3 - 8x^2 - 6x + 10, 3x - 2$

༥། $16x^4 + 12x^3 - 10x^3 + 8x + 20, 4x - 3$

༤། $5y^3 - 6y^2 + 6y - 1, 5y - 1$

༦། $z^4 + z^3 + z^2, z + 1$

༥། $x^4 + x^3 + 5x, x - 1$

༧། $y^4 + y^2, y^2 - 2$

༡༡། བོད་གི་རྩིས་འབྲས་ལ། བཤོད་བྱ་ = བཤོད་བྱེད་ × བཤོས་ཐོབ་ + བཤོས་ལྷག་ བེད་སྤྱད་དེ་བཤེར་
རྩིས་ཚུལ། ང་ཚོས་བཤོས་ན་བཤོས་ལྷག་གི་ཐོངས་གུངས་གང་ཡིན་སྲིད་དམ།

༡༣། $x + 9$ ཡིས་ $x^4 + x^3$

༡༣། $x - 2$ གྱིས་ $x^2 + x + 1$

༡༤། $x^3 + 4$ ཡིས་ $x^4 + 10x^3 - 9$

༡༤། $y^2 + 6$ གིས་ $y^4 + y^2 - y - 3$

ཚན་མང་ཚུལ་དང་པོ་དེ་གཉིས་པ་དེ་ཡི་བཤོད་གུངས་ཡིན་མིན་བརྟོགས།

༡༦། $x + 1, 2x^2 + 5x + 4$

༡༦། $3x + 1, 6x^2 + x + 1$

༡༧། $4y + 1, 18y^2 - 2y + 1$

༡༧། $2a - 3, 10a^2 - 9a - 5$

༡༨། $4 - z, 3z^2 - 13z + 4$

༡༧། $4z^2 - 5, 4z^4 + 7z^2 + 15$

༡༩། $y - 2, 3y^3 + 5y^2 + 5y + 2$





དུན་གསེས་གྲིས་དང་།

- ༡། ལྗེ་ལྷོན་གྲངས་ལྡན་ཀོར་མིན་པའི་གྲངས་ཀྱི་ཚབ་ཅེས་ཚུལ་ལ་**ཚན་མང་ཚུལ་** (Polynomial) ཟེར།
- ༢། ལྗེ་གཅིག་ཁོ་ན་ལེན་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་ལ་ལྗེ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུལ་ (Polynomial in one variable) ཟེར།
- ༣། ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་ཚན་པ་ཁག་གི་ལྗེ་ལྷོན་གྲངས་ཆེ་བོས་དེར་དེའི་**ཐངས་གྲངས་** (Degree) ཟེར།
- ༤། **རྟག་གྲངས་** (Constant Number) ཞེ་ཐངས་གྲངས་ལྡན་ཀོར་ལེན་པའི་ཚན་མང་ཚུལ་རེད།
- ༥། ལྗེ་གཅིག་ཚན་མང་ཚུལ་གྱི་**ཚད་ལྡན་རྣམ་པ་** (Standard form) ཞེ་ཚན་མང་ཚུལ་དེའི་ཚན་པ་རྣམས་ལྗེ་ལྷོན་གྲངས་ཀྱི་འབྲིབ་རིམ་ལྟར་བྲིས་པ་ལ་ཟེར།
- ༦། ཚན་རྒྱུ་ཚུལ་གཉེས་ཀྱི་བཤོས་ཐོབ་**འཕུལ་གྲངས་** (Coefficient) ཞེ་དེ་དག་གི་འཕུལ་གྲངས་ཀྱི་བཤོས་ཐོབ་དང་མཚུངས།
- ༧། ཚན་རྒྱུ་ཚུལ་གཉེས་ཀྱི་བཤོས་ཐོབ་ཀྱི་རྒྱ་གྲངས་ཁག་ནི་ཤེས་པའི་ཚན་རྒྱུ་ཚུལ་གྱི་བཤོས་ཐོབ་དང་མཚུངས།
- ༨། གལ་ཏེ་ཚན་མང་ཚུལ་ (བཤོ་བྱ།) ཞིག་ཚན་མང་ཚུལ་ (བཤོད་བྱེད།) གྱིས་བཤོས་ཏེ་བཤོས་སྟེང་ལྡན་ཀོར་ཐོབ་
- ༩། བཤོད་བྱེད་ནི་བཤོ་བྱའི་རྒྱུ་ཚུལ་རེད། འདི་ལྟའི་གནས་སྐབས་སུ་བཤོས་ཐོབ་ཀྱང་བཤོ་བྱའི་རྒྱུ་ཚུལ་རེད།

$$\text{བཤོ་བྱ} = \text{བཤོད་བྱེད} \times \text{བཤོས་ཐོབ}$$
- ༡༠།
$$\text{སྒྱིར་བཏང་བྱས་ན།} \quad \text{བཤོ་བྱ} = \text{བཤོད་བྱེད} \times \text{བཤོས་ཐོབ} + \text{བཤོས་སྟེང}$$
- ༡༡། བཤོས་སྟེང་གི་ཐངས་གྲངས་ནི་བཤོད་བྱེད་ཀྱི་ཐངས་གྲངས་ལས་ཉུང་ལྡང་བ་ཡིན།
- ༡༢། བཤོད་ཐབས་རིང་བ་མ་སྟེང་གོང་། དེས་པར་དུ་བཤོ་བྱ་དང་བཤོད་བྱེད་ཚད་ལྡན་རྣམ་པར་འབྲི་དགོས།
- ༡༣། བཤོད་ཐབས་རིང་བ་ལེད་སྟེང་བྱེད་སྐབས། ཚན་མཐུན་རྣམས་གཅིག་འོག་གཞན་དེ་འབྲི་དགོས་པ་དང་། དཤོས་གལ་བྱུང་ན་བར་སྟོང་ཡང་འཛོག་དགོས།

