

སློབ་ཚན་གསུམ་པ།

ལྷན་སྟོན་གྲངས་དང་གཞི་ཚུལ།

CHAPTER 3: RATIONAL EXPONENTS AND RADICALS

3.1 རིམ་སྟོན། Introduction

གལ་ཏེ x རིམ་ལྷན་སྟོན་གྲངས་དང་། m རིམ་གྲངས་ཐེ་ཡིན་ན། $x^m = x \times x \times \dots \times x$ ཐངས་ m ཡིན་པ་དྲན་གསུངས་དང་། དེ་ལྟར། གལ་ཏེ x རིམ་འདྲ་ཤོད་མེད་པའི་ལྷན་སྟོན་གྲངས་ཤིག་ཡིན་པ་དང་། k རིམ་གྲངས་རིམ་ཤི་མོ་ཞིག་ལྟེ། $k = -m$ ཡིན་ལ། རྒྱབས་འདེད་ m རིམ་གྲངས་ཤི་ཞིག་ཡིན་པ་ན།

$$\begin{aligned} x^k &= x^{-m} = x^{-1} \times x^{-1} \times \dots \times x^{-1} && \text{ཐངས་} m \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \dots \times \frac{1}{x} && \text{ཐངས་} m \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^m = \frac{1}{x^m} \end{aligned}$$

གལ་ཏེ x རིམ་འདྲ་ཤོད་མེད་པའི་ལྷན་སྟོན་གྲངས་ཡིན་ཞིང་། m དང་ n རིམ་གྲངས་ཡིན་ན།

$$\begin{aligned} x^m \times x^n &= x^{m+n} \times \dots \times x^{-1} \\ x^m \div x^n &= x^{m-n} \\ (x^m)^n &= x^{m \times n} \end{aligned}$$

ལང་ $x^m y^m = (xy)^m$ (x དང་ y རིམ་འདྲ་ཤོད་མེད་པའི་ལྷན་སྟོན་གྲངས་ཡིན་པར་ཆ་ཞིག།)

སློབ་ཚན་འདིར་ང་ཚོས་ x རིམ་ལྷན་སྟོན་གྲངས་ཐེ་དང་། m རིམ་ལྷན་སྟོན་གྲངས་ཡིན་པའི་ x^m གྱི་དོན་སྟོན་རྒྱ་ཡིན། ང་ཚོས་སྟོན་གྲངས་རིམ་ཤི་ཚབ་དུ་སྟོན་གྲངས་ལྷན་སྟོན་གྲངས་ཅན་ལའང་གོང་གི་འབྲེལ་པའི་རིགས་མཚོན་རྒྱ་ཡིན།

4.1 ལུགས་ལྡན་རྟོན་གྲངས་ལོ། Positive Rational Exponents

ང་ཚོས་ $3^3 = 27$ ཡིན་པ་ཤེས་ཡོད། ང་ཚོས་ད་དུང་འགྲེལ་བ་འདི་ནི་ $27^{\frac{1}{3}} = 3$ ལྟར་ཡང་མཚོན་ཚིག་ དེ་
 ལྟར་ $2^5 = 32$ རི་ $32^{\frac{1}{5}} = 2$ ལྟར་མཚོན་ཚིག་། སྤྱིར་བཏང་། གལ་ཏེ་ x དང་ y རི་མཐད་ཀོར་མིན་པའི་ལུགས་ལྡན་
 གྲངས་ཡིན་པ་དང་། m རི་རིལ་གྲངས་ཤི་ཞིག་ $x^m = y$ ལྟར་ཡིན་ན། དེ་ནི་ང་ཚོས་ $y^{\frac{1}{m}} = n$ ལྟར་བྲིས་ཚིག་ ང་ཚོས་
 $y^{\frac{1}{m}}$ རི་ $\sqrt[m]{y}$ ལྟར་བྲིས་ཚིག་ཅིང་། འདི་ལ་ y གྱི་གཞི་གྲངས་ m ཞེས་ལྟོག་གོ།

དེས་ན། 4 ཡི་གཞི་གྲངས་གཉིས་པ། $\sqrt[2]{4} = 2$

27 གྱི་གཞི་གྲངས་གསུམ་པ། $\sqrt[3]{27} = 3$

625 ཡི་གཞི་གྲངས་ལྔ་པ། $\sqrt[5]{625} = 5$ སོགས་རེད།

འདི་ལ་རིགས་བརྗེས་ཏེ། ང་ཚོས་ལུགས་ལྡན་རྟོན་གྲངས་ལོ་ m ཅན་གྱི་ x^m ལོ་དོན་འགྲེལ་བྱལ། གལ་ཏེ་ x
 རི་ལུགས་ལྡན་གྲངས་ལོ་དང་། $m = \frac{p}{q}$ རི་ལུགས་ལྡན་རྟོན་གྲངས་ཤི་ཞིག་ཡིན་ན། $\frac{p}{q}$ རི་ x^p ཡི་གཞི་གྲངས་ q
 ཡི་དོན་ལ་གོ་དགོས།

དེ་ནི་འདི་ལྟར། $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ ཡིན་པ་དང་།

དཔེར་ན། $8^{\frac{5}{3}} = (8^5)^{\frac{1}{3}} = (32768)^{\frac{1}{3}} = 32$

སྐར་ཡང་། $\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = 32$

དེས་ན། $(8^5)^{\frac{1}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5$

8, 3, 5 བཅས་ལ་དམིགས་བསལ་གང་ཡང་མེད་པས་རྩིས་འགྲུས་འདི་ནི་སྤྱིར་བཏང་ཡང་དག་རེད།

གལ་ཏེ་ x ལུགས་ལྡན་གྲངས་ཤི་ཞིག་ཡིན་ན། ལུགས་ལྡན་རྟོན་གྲངས་ལོ་ $\frac{p}{q}$ ལ་ $(x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ རེད།

དེར་བརྟེན། ང་ཚོས་ $\frac{p}{q}$ ཡི་གོ་དོན་གཤམ་གསལ་མཚུངས་ཐོབ་ཀྱི་རྣམ་པ་གང་འདྲ་ཐོབ་མཚོན་བྱལ།

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4, \quad \left(\left(\frac{2}{3}\right)^4\right)^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \text{ ཡིན་པས་སོ། །}$$

$$= \frac{16}{81}$$

ཡང་ན་ $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4$ (མཚུངས་ཐོབ་ཁ་པ་སླུང་པ།)

$$= \left[\left[\left(\frac{2}{3}\right)^5\right]^{\frac{1}{5}}\right]^4$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad (x^m)^{\frac{1}{m}} x, x > 0 \text{ སླུང་པ།}$$

$$= \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

མཚན།

གོང་གི་ཉེས་དཔེའི་ནང་ང་ཚོས་རྣམ་པ་(༡) དང་(༢) གཉིས་ཀ་པོའི་སྲིད་ཁྲིམས་ཡོད། དེ་གཉིས་ལས་ཉེས་ཀྱི་ཁྲིམས་པོའི་ཕྱིར་དུ་རྣམ་པ་གང་པོའི་སྲིད་ཁྲིམས་ཡོད། །



ཉེས་དཔེ། 2.

གཤམ་གསལ་ཉེས་དཔེ་གཉིས་ཀྱི་ཉེས་འབྲས་ཚོལ།

ཀ) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}}$ ཁ) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3+5}{4}}$

ལན། ཀ) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} = \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^3 \times \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5$ (ཉེས་ཐབས་གཉིས་པ་སླུང་པ།)

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \text{ ཡིན་པས་སོ། །}$$



$$= \left(\frac{2}{3}\right)^8 \text{ རིལ་གྲངས་} m \text{ དང་} n \text{ ལ་ } x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$= \frac{2^8}{3^8} = \frac{256}{6561}$$

ཁ) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^2$ $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} = 2$ ཡིན་པས་སོ།།

$$= \frac{16^2}{81^2} = \frac{256}{6561}$$

མཚན།

གོང་གི་རྩིས་དཔེ་ལས་ང་ཚོར་དོ་སྣང་བྱུང་བ་ལ། $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}$ འདི་ནི་དེས་སློབ་ལ་ $x^m \times x^n = x^{m+n}$

ཡི་རྗེས་སུ་འགྲུབ་སྟོན་དོ། །

རྩིས་དཔེ། 3. ག་གམ་གསལ་རྩིས་འགྲུབ་ཚོལ།

ཀ) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}$ ཁ) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}-\frac{3}{4}}$

ལན། ཀ) $\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^5 \div \left[\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^3$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^5 \div \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

རིལ་གྲངས་ m དང་ n རི། $x^m \div x^n = x^{m-n}$ ཡིན་པས་སོ། །

$$= \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$





$$\begin{aligned} \text{ཁ)} \quad \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4}} &= \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{2}} && \text{(རྒྱ་མཚན་ནི། } \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \text{ ཡིན་པས་སོ། །)} \\ &= \frac{4}{9} && \text{(རྒྱ་མཚན་ནི། } \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81} \text{ ཡིན་པས་སོ། །)} \end{aligned}$$

མཚན། གོང་གི་ཕྱིས་དཔེ་ལས་ང་ཚོས་དོ་སྣང་བྱུང་བ་ཞིག་ལ།

$$\left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4}} \div \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}} \quad \text{འདི་ནི་དེས་སློབ་པ་} x^m \div x^n = x^{m-n} \text{ ཡི་རྒྱུས་སུ་འབྲངས་ཡོད།}$$



3.3 ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་མོ། Negative Rational Exponents

འཛིན་གྲུ་བདུན་པའི་སྐབས་ལ་བྲན་གསེབ་སྤྱོད་དང་། གལ་ཏེ་ m རེལ་གྲངས་མེད་དང་། x རི་ལྡན་གོར་མིན་པའི་

ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཤིག་ཡིན་ན། $x^{-m} = \frac{1}{x^m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$ ཡིན། དེའི་དོན་ནི། x^{-m} རི་ x^m གྱི་ལོག་གྲངས་

$$\left(\frac{x^p}{s^q}\right)^{-\frac{p}{q}}$$

(Reciprocal) སམ། ཡང་ན་ x ཡི་ལོག་གྲངས་ཀྱི་ཐོངས་གྲངས་ m རེད།

ཕྱི་ཐབས་འདི་ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་ཀྱི་སྐབས་སུ་འང་བསྟན་ཡོད་པ་གསལ་གསལ་ལ།

$$\text{གལ་ཏེ་} \frac{p}{q} \text{ ལྷགས་ལྡན་གྲངས་མེད་དང་། } x > 0 \text{ ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཡིན་ན། } = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{p}{q}} \text{ རེད།}$$

དེ་ཡང་། $x^{-\frac{p}{q}}$ རི་ $x^{\frac{p}{q}}$ ཡི་ལོག་གྲངས་ཡིན། ཡང་ན། x ཡི་ལོག་གྲངས་ཀྱི་ཐོངས་གྲངས་ $\frac{p}{q}$ ལས་ཐོབ་པའི་གྲངས་

$$\text{ཡིན། དེར་བརྟེན། གལ་ཏེ་} x = \frac{r}{s} (r, s > 0) \text{ ཡིན་ན། } = \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{p}{q}} \text{ ཡིན། རྒྱ་མཚན་ནི་} \frac{r}{s} \text{ ཡི་ལོག་གྲངས་}$$

$\frac{s}{r}$ ཡིན་པས་སོ། །

ཕྱིས་དཔེ། 4. ཀ) $8^{-\frac{2}{3}}$ ཁ) $\left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{4}{5}}$ ཚོལ།





ལན། ཀ) $8^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

$$= \left[\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad (\text{རྒྱ་མཚན་ནི། } \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \text{ ཡིན་པས་སོ།།)}$$

$$= \frac{1}{4}$$

ཁ) $\left(\frac{32}{243}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{4}{5}} = \left[\left(\frac{243}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4 = \left[\left(\left(\frac{3}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}}\right]^4$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

ཕྱི་ས་དཔེ། 5.

གཤམ་གྱི་ཕྱི་ས་དཔེ་གཉིས་ཀྱི་ཕྱི་ས་འབྲས་ཚོལ།

ཀ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$ ཁ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)}$

ལན། ཀ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} = \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$

$$= \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\frac{5^3}{3^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4 = \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^2 \times \left[\left(\left(\frac{5}{3}\right)^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^4$$

$$= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \left(\frac{5}{3}\right)^6 = \frac{15625}{729}$$

ཁ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)} = \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-6}{3}}$

$$= \left(\frac{27}{125}\right)^{-2}$$

$$= \left(\frac{125}{27}\right)^2 = \frac{15625}{729}$$



མཆན། ཤོང་གི་ཚིས་དཔེ་ལས་ང་ཚོར་དོ་སྣང་བྱུང་བ་ལ། $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \times \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} = \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} + \left(\frac{-4}{3}\right)}$

ཡིན་པ་སྟེ། ཚིས་

གཞི་ $x^m \times x^n = x^{m+n}$ ཡི་རྗེས་སུ་འབྲངས་ཡོད།

ཚིས་དཔེ། 6.

གཤམ་གྱི་ཚིས་འབྲས་བཙལ་རྗེས་དེ་དག་འདྲ་མཚུངས་ཡིན་མིན་རྟོགས།

ཀ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}}$ ཁ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} - \left(\frac{-4}{3}\right)}$

ལན། ཀ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-4}{3}} = \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \div \left(\frac{125}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$

$$= \left[\left(\frac{5^3}{3^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \div \left[\left(\frac{5^3}{3^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^4$$

$$= \left[\left(\left(\frac{5}{3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \div \left[\left(\left(\frac{5}{3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^4$$

$$= \left(\frac{5}{3} \right)^2 \div \left(\frac{5}{3} \right)^4 = \left(\frac{5}{3} \right)^{2-4}$$

$$= \left(\frac{5}{3} \right)^{-2} = \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}$$

ཁ) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{-2}{3} - \left(\frac{-4}{3}\right)} = \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}$

$$= \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{3^3}{5^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2$$

$$= \left[\left(\left(\frac{3}{5} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 = \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}$$



གོང་གི་ཚུལ་འབྲས་གཉིས་གཅིག་པ་ཡིན། ཚུལ་དཔེ་དེ་གཉིས་ཀྱིས་ $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}} \div \left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\frac{27}{125}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(-\frac{4}{3}\right)$

སྟོན་གྱི་ཡོད་ཅིང་། དེས་སློལ་ $x^m \div x^n = x^{m-n}$ ཡི་རྗེས་སུ་འབྲངས་ཡོད།



༡.༤ སྟོན་གྲངས་ཀྱི་དེས་སློལ། Laws of Exponents

གལ་སྲིད་ x གླང་ཀོར་མིན་པའི་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་དང་། m དང་ n སྟོན་གྲངས་རིལ་པོ་ཡིན་ན་ང་ཚོས་ཤེས་

གསལ་ལྟར། $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (1)

$x^m \div x^n = x^{m-n}$ (2)

$(x^m)^n = x^{m \times n}$ (3)

གལ་སྲིད་ x དང་ y གླང་ཀོར་མིན་པའི་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཡིན་ན།

$x^m \times y^m = (x \times y)^m$ (4)

གོང་གི་འབྲེལ་བ་དེ་དག་ m དང་ n ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་དང་། x དང་ y ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་སྐབས་

སྤངས་ཡང་དག་(བདེན་)པ་རེད།

ཚུལ་དཔེ་གཉིས་པ་དང་ལྟ་པའི་སྐབས་སུ་གཤམ་གསལ་གྱི་དེས་སློལ་བྱུང་།

དེས་སློལ། ༡ གལ་ཏེ་ $x > 0$ ཅན་དེ་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཡིན་པ་དང་། m དང་ n གཉིས་ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་

ཡིན་ན། $x^m \times x^n = x^{m+n}$ རེད།

དེ་མཚུངས། ཚུལ་དཔེ་༩ པ་དང་། ༦ པས་གཤམ་གྱི་དེས་སློལ་འབྲེལ་བ་རྫོང་བྱས་ཡོད།

དེས་སློལ། ༢ ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ $x > 0$ ཞིག་དང་ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་ m དང་ n ཀྱི་སྐབས་སུ།

$x^m \div x^n = x^{m-n}$ ཡིན།

གོང་གི་དེས་སློལ་གཉིས་ཀ་སྟོན་གྲངས་གཅིག་པོ་དང་གཞན་དེ་མོ་གྲངས་ཡིན་པའི་སྐབས་ཁོ་ནར་སྦྱོད་པར་རུང་

དོ། །ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་སྐབས་སུ་ང་ཚོས་འབྲེལ་བ་(༩) པ་ལ་བཞེར་ཚུལ་ལྟར་དེ་ཚོས་གཤམ་གསལ་

ཚུལ་དཔེ་ཁག་ལ་བཞེར་བར་བྱའོ། །





ཚུལ་དཔེ། 7. གཤམ་གྱི་ཚུལ་འབྲས་བཙལ་ཏེ་དེ་གཞིས་གཅིག་པ་ཡིན་པ་སྟོན།

$$\text{ཀ) } \left[\left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{5}{2}} \right]^{\frac{3}{5}} \qquad \text{ཁ) } \left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{5}{2} \times \frac{3}{5}}$$

ལན།

$$\begin{aligned} \text{ཀ) } \left[\left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{5}{2}} \right]^{\frac{3}{5}} &= \left[\left\{ \left(\frac{5^2}{3^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^5 \right]^{\frac{3}{5}} \\ &= \left[\left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^5 \right]^{\frac{3}{5}} \\ &= \left[\left(\frac{5}{3} \right)^5 \right]^{\frac{3}{5}} = \left[\left(\frac{5}{3} \right)^5 \right]^{\frac{1}{5} \times 3} \\ &= \left(\frac{5}{3} \right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ཁ) } \left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{5}{2} \times \frac{3}{5}} &= \left(\frac{25}{9} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left[\left\{ \left(\frac{5}{3} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^3 = \left(\frac{5}{3} \right)^3 = \frac{5^3}{3^3} = \frac{125}{27} \end{aligned}$$

དེར་བརྟེན། ཚུལ་གཞི་དེ་གཞིས་གྱི་ཚུལ་འབྲས་གཅིག་པ་རེད།

ཚུལ་དཔེ། 8. $\left[(729)^{\frac{-5}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} = (729)^{-\frac{5}{3} \times (-\frac{1}{2})}$ ཡིན་པའི་བཤེར་ཚུལ་རྒྱུ།

ལན།

$$\left[(729)^{\frac{-5}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{729} \right)^{\frac{5}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\left\{ \left(\frac{1}{9^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right\}^5 \right]^{-\frac{1}{2}}$$





$$\begin{aligned}
 &= \left[\left(\frac{1}{9} \right)^5 \right]^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9^5} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9^5}{1} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \left[(3^2)^5 \right]^{\frac{1}{2}} = (3^{10})^{\frac{1}{2}} \\
 &= 3^5 = 243
 \end{aligned}$$

གཞན་ཡང་། $(729)^{-\frac{5}{3} \times (-\frac{1}{2})} = (729)^{\frac{5}{6}} = (3^6)^{\frac{5}{6}}$

$$= \left[(3^6)^{\frac{1}{6}} \right]^5 = 3^5 = 243$$

དེར་བརྟེན། $\left[(729)^{\frac{-5}{3}} \right]^{-\frac{1}{2}} = (729)^{-\frac{5}{3} \times (-\frac{1}{2})}$

གོང་གསལ་ཕྱིས་དཔེ་གཉིས་ཀྱི་ནང་དུ་གཞུགས་གསལ་ངེས་སྲོལ་གྱི་བཞེར་ཕྱིས་བརྒྱབ་ཡོད།

ངེས་སྲོལ། ༡ གལ་ཏེ་ $x > 0$ ཅན་གྱི་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་དང་། m དང་ n ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་ཡིན་ན།

$$(x^m)^n = x^{m \times n} \text{ ཡིན་ནོ། } |$$

ད་ཆ་ང་ཚོས་གོང་དུ་བརྟན་པའི་ལྷགས་ལྡན་སྟོན་གྲངས་ཀྱི་འབྲེལ་བ་(༤) པའི་བཞེར་ཕྱིས་བྱ་རྒྱུ་ཡིན།

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{8}{125} \right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{64}{27} \right)^{\frac{2}{3}} &= \left[\left(\frac{2^3}{5^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \times \left[\left(\frac{4^3}{3^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \\
 &= \left[\left(\left(\frac{2}{5} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \times \left[\left(\left(\frac{4}{3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 \\
 &= \left(\frac{2}{5} \right)^2 \times \left(\frac{4}{3} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{2}{5} \times \frac{4}{3} \right)^2 = \left(\frac{8}{15} \right)^2 = \frac{64}{225}
 \end{aligned}$$

གཞན་ཡང་། $\left(\frac{8}{125} \times \frac{64}{27} \right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{8 \times 64}{125 \times 27} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 = \left[\left(\frac{8^3}{5^3 \times 3^3} \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2$





$$= \left[\left(\left(\frac{8}{5 \times 3} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}} \right]^2 = \left(\frac{8}{15} \right)^2 = \frac{64}{225}$$

དེ་བཞིན། $(27)^{-\frac{1}{3}} \times \left(\frac{64}{729} \right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{729}{64} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$= \left(\frac{1}{3^3} \right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\left(\frac{9}{4} \right)^3 \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

གཞན་ཡང་། $\left(27 \times \frac{64}{729} \right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{64}{27} \right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{64} \right)^{\frac{1}{3}} = \left[\left(\frac{3}{4} \right)^3 \right]^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$

དེས་ན་ང་ཚོས་གཤམ་གྱི་ངེས་སྲོལ་བཤེར་རྩིས་བརྒྱབ་ཡོད་དོ། །

ངེས་སྲོལ། གལ་ཏེ་ x དང་ y ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ $x, y > 0$ དང་། m ལྷགས་ལྡན་རྟོན་གྲངས་ཡིན་ན།

$$x^m \times y^m = (x \times y)^m \text{ ཡིན།}$$

ལེ་ཚན་མ་ལེན་དང་བརྒྱན་པའི་འབྲེལ་བ་(༡) ནས་(༤) བར་གྱི་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཐོ་དང་ལྷགས་ལྡན་

རྟོན་གྲངས་སྐབས་སུ་དེ་དག་ཚང་མ་རྒྱ་མཚན་དང་ལྡན་པར་ཆ་འཇོག་གུ་རྒྱུ་ཡིན།

རྩིས་དཔེ། 9. གཤམ་གསལ་ཁག་གི་རྩིས་འབྲས་ཚོལ།

ཀ) $(0.125)^{\frac{2}{3}}$ ཁ) $(0.000729)^{-\frac{3}{4}} \times (0.09)^{-\frac{3}{4}}$

ལན། ཀ) $(0.125)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{1000} \right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{5^3}{10^3} \right)^{\frac{2}{3}} = \left[\left(\frac{5}{10} \right)^3 \right]^{\frac{2}{3}}$

$$= \left(\frac{5}{10} \right)^{3 \times \frac{2}{3}} \quad (\text{ངེས་སྲོལ་༡ ཐོ་སླུང་པ།})$$

$$= \left(\frac{5}{10} \right)^2 = \frac{5^2}{10^2} = \frac{25}{100} = 0.25$$



$$\begin{aligned}
 \text{ཁ)} \quad (0.000729)^{\frac{-3}{4}} \times (0.09)^{\frac{-3}{4}} &= \left(\frac{729}{1000000}\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(\frac{9}{100}\right)^{\frac{-3}{4}} \\
 &= \left(\frac{1000000}{729}\right)^{\frac{-3}{4}} \times \left(\frac{100}{9}\right)^{\frac{-3}{4}} \\
 &= \left(\frac{10^6}{9^3}\right)^{\frac{3}{4}} \times \left(\frac{10^2}{9}\right)^{\frac{3}{4}} \\
 &= \left(\frac{10^6 \times 10^2}{9^3 \times 9}\right)^{\frac{3}{4}} \quad (\text{ངེས་སྲོལ་ལ་ པ་སླུད་པ།}) \\
 &= \left(\frac{10^8}{9^4}\right)^{\frac{3}{4}} = \frac{10^{8 \times \frac{3}{4}}}{9^{4 \times \frac{3}{4}}} = \frac{10^6}{9^3} = \frac{1000000}{729}
 \end{aligned}$$

ཕྱི་ས་དཔེ། 10. ག་གསུམ་གསུམ་ལ་ཕྱི་ས་གཞི་དག་གི་ཐོབ་གྲངས་ཚོལ།

$$\text{ཀ)} \quad (13^2 - 5^2)^{\frac{3}{2}} \qquad \text{ཁ)} \quad (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3)^{\frac{-3}{2}}$$

ལན།

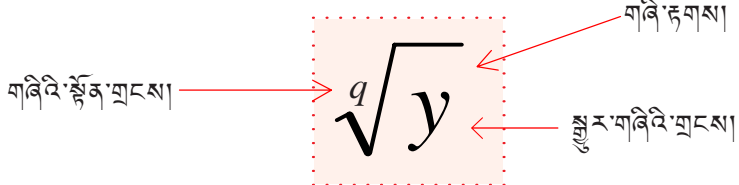
$$\begin{aligned}
 \text{ཀ)} \quad (13^2 - 5^2)^{\frac{3}{2}} &= [(13+5) \times (13-5)]^{\frac{3}{2}}, \quad [x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)] \\
 &= (18 \times 8)^{\frac{3}{2}} = (3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2)^{\frac{3}{2}} \\
 &= (3^2 \times 2^4)^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}} \times (2^4)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{ངེས་སྲོལ་ལ་ པ་སླུད་པ།}) \\
 &= 3^{2 \times \frac{3}{2}} \times 2^{4 \times \frac{3}{2}} \quad (\text{ངེས་སྲོལ་ཀ པ་སླུད་པ།}) \\
 &= 3^3 \times 2^6 = 1728
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ཁ)} \quad &= (1+8+27+64)^{\frac{3}{2}} \\
 &= (100)^{\frac{-3}{2}} = (10^2)^{\frac{-3}{2}} \\
 &= 10^{2 \times \left(\frac{-3}{2}\right)} \quad (\text{ངེས་སྲོལ་ཀ པ་སླུད་པ།}) \\
 &= 10^{-3} = \frac{1}{1000}
 \end{aligned}$$



7.4 གཞི་ཚུལ་དང་གཞི་ཚུལ་རྩ་གྲངས། Radicals and Radicands

གལ་ཏེ་ $y > 0$ དང་ $y^{\frac{1}{q}} = x$ ཡིན་ན། $x = \sqrt[q]{y}$ ཡིན་པ་ཤེས་ཡོད། དེ་ནི་ $y^{\frac{1}{q}}$ དང་ $\sqrt[q]{y}$ རི་ཚུལ་
 ཞིག་གི་རྣམ་པ་མི་འདྲ་བ་གཉིས་རེད། $y^{\frac{1}{q}}$ ལ་**སྟོན་གྲངས་ཀྱི་རྣམ་པ་**(Exponential form) དང་། $\sqrt[q]{y}$ ལ་**གཞི་**
ཚུལ་ཀྱི་རྣམ་པ་(Radical form) ཟེར་ཞིང་། རྟགས་ $\sqrt{\quad}$ འདི་ལ་**གཞི་རྟགས་**(Radical sign) དང་། གྲངས་ q ལ་**གཞིའི་**
སྟོན་གྲངས་(Index of Radical) ཟེར་བ་དང་། y ལ་**རྒྱུར་གཞིའི་གྲངས་**(Radicand) ཟེར། དོ་རྒྱུར་བྱ་རྒྱུར།
 གཞི་ཚུལ་ཀྱི་ཐོངས་གྲངས་ནི་རྟག་ཏུ་རིལ་གྲངས་ཐོ་ཡིན། གལ་ཏེ་ q རི་ $32^{\frac{1}{5}}$ བཞིན་མོ་གྲངས་ཡིན་ན། དེ་ $\sqrt[5]{32}$ རྩར་
 མི་འབྲི་བར་ང་ཚོས། $32^{\frac{1}{5}}$ རི་ $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$ རྩ། དེ་ནི་ $\sqrt[5]{\frac{1}{32}}$ རྩར་འབྲི་དགོས། 5 རི་གཞི་ཚུལ་ཀྱི་ཐོངས་གྲངས་དང་།
 $\frac{1}{32}$ རི་རྒྱུར་གཞིའི་གྲངས་སམ་གཞི་གྲངས་རེད།



གཞི་ཚུལ་ཀྱི་རྣམ་པ།

ཕྱིས་དཔེ། 11. གཤམ་གསལ་ཕྱིས་གཞི་གཉིས་སྟོན་གྲངས་དང་གཞི་ཚུལ་ཀྱི་རྣམ་པ་སོ་སོར་བྲིས།

ཀ) $\sqrt[3]{1234}$ ཁ) $\left(\frac{567}{890}\right)^{\frac{1}{8}}$

ལན།

- ཀ) དགོས་ངེས་ཀྱི་སྟོན་གྲངས་ཀྱི་རྣམ་པ་ནི་ $(1234)^{\frac{1}{5}}$ རེད།
 ཁ) $\left(\frac{567}{890}\right)^{\frac{1}{8}} = \left(\frac{890}{567}\right)^{\frac{1}{8}}$ དེས་ན། དགོས་ངེས་ཀྱི་གཞི་ཚུལ་ཀྱི་རྣམ་པ་ནི་ $\sqrt[8]{\frac{890}{567}}$ རེད།



སློབ་ཚན། 3.1



1) གཤམ་གསལ་གྱི་ཚིས་འབྲས་ཚོལ།

ཀ) $(16)^{\frac{1}{2}}$ ཁ) $(243)^{\frac{1}{5}}$ ག) $(15625)^{\frac{1}{6}}$

2) གཤམ་གྱི་ཚིས་འབྲས་ཚོལ།

ཀ) $(32768)^{\frac{1}{15}}$ ཁ) $(279936)^{\frac{1}{7}}$

3) གཤམ་གསལ་གྱི་ཚིས་གཞིའི་བྲིན་ཚོལ།

ཀ) $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$ ཁ) $\left(\frac{343}{1331}\right)^{\frac{1}{3}}$

4) གཤམ་གྱི་ཚིས་འབྲས་ཚོལ།

ཀ) $\left(\frac{390625}{6521}\right)^{\frac{1}{8}}$ ཁ) $\left(\frac{117649}{1771561}\right)^{\frac{1}{6}}$

5) གཤམ་གསལ་རྣམས་སློབ་གྲངས་ཀྱི་རྣམ་པར་བྲིས།

ཀ) $\sqrt{5}$ ཁ) $\sqrt[3]{7}$ ག) $\sqrt[3]{1100}$ ཅ) $\sqrt[4]{\frac{3}{4}}$ ཆ) $\sqrt[8]{\frac{61}{1123}}$

6) གཤམ་གསལ་རྣམས་གཞི་ཚུལ་གྱི་རྣམ་པར་བྲིས་ནས། དེ་དག་མེ་མེའི་གཞི་ཚུལ་གྱི་ཐངས་གྲངས་དང་སྐྱུར་གཞིའི་གྲངས་བཅས་ཚོལ།

ཀ) $16^{\frac{1}{2}}$ ཁ) $125^{\frac{1}{3}}$ ག) $\left(\frac{6}{11}\right)^{\frac{1}{9}}$ ཅ) $\left(\frac{23}{11}\right)^{-\frac{1}{11}}$ ཆ) $\left(\frac{328}{61}\right)^{-\frac{1}{17}}$

7) གཤམ་གསལ་ཁག་གི་ཚིས་འབྲས་ x^p དེ་གཞིའི་ཐངས་གྲངས་ q ངང་། སྐྱེ་འགྲོས་ $x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ སྟུང་དེ་ཚོལ།

ཀ) $8^{\frac{5}{3}}$ ཁ) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{3}{4}}$ ག) $\left(\frac{25}{49}\right)^{\frac{7}{2}}$ ཅ) $\left(\frac{256}{6561}\right)^{\frac{3}{8}}$

8) གཞིའི་ཐངས་གྲངས་ q ཡི་སློབ་གྲངས་ p ཡིན་པའི་སྐྱེ་འགྲོས་ $x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$ སྟུང་དེ་དྲི་བ་ཡ པའི་གཞི་ཚུལ་ཁག་གི་ཚིས་འབྲས་ཚོལ།

9) ཚིས་འབྲས་ཚོལ།





199) $343^{\frac{1}{3}}$

199) $\left(\frac{625}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$

200) ཚིངས་འབྲས་ཚོལ།

1) $\left(\frac{25}{81}\right)^{-\frac{3}{2}}$

2) $\left(\frac{256}{6561}\right)^{-\frac{5}{8}}$

201) ག་གམ་གསལ་རྣམས་སྟབས་བདེར་སྒྱུར།

1) $23^{\frac{1}{2}} \times 23^{\frac{3}{2}}$

2) $11^{\frac{4}{3}} \times 11^{\frac{5}{3}}$

3) $3 \times 9^{\frac{3}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}}$

4) $27^{\frac{2}{3}} \times 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{4}{3}}$

202) ག་གམ་གསལ་རྣམས་གང་བདེར་སྒྱུར།

1) $15^{\frac{3}{2}} \div \left(\frac{1}{15}\right)^{\frac{1}{2}}$

2) $\left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{4}{3}} \div \left(\frac{2}{13}\right)^{\frac{5}{3}}$

3) $3 \times 9^{\frac{1}{2}} \div 9^{\frac{3}{2}}$

4) $27^{\frac{2}{3}} \div 27^{\frac{1}{3}} \times 27^{-\frac{4}{3}}$

203) ག་གམ་གསལ་རྣམས་ཀྱི་ཚིངས་འབྲས་ཚོལ།

1) $(0.04)^{\frac{3}{2}}$

2) $(0.008)^{\frac{2}{3}}$

3) $(6.25)^{\frac{3}{2}}$

4) $(0.000064)^{\frac{5}{6}}$

$(x^{-3})^{-4} = x^{12}$

204) ག་གམ་གསལ་རྣམས་ཀྱི་ཚིངས་འབྲས་ཚོལ།

1) $(3^2 + 4^2)^{-\frac{1}{2}}$

2) $(5^2 + 12^2)^{\frac{3}{2}}$

3) $(17^2 + 8^2)^{\frac{1}{2}}$

4) $(1^3 + 2^3 + 3^3)^{-\frac{5}{2}}$

205) ག་གམ་གསལ་གྱི་བརྗོད་པ་རྣམས་འགྲེགས་མིན་ཏེ་གསུང་།

1) གལ་ཏེ་ x ཡོངས་རྒྱུས་ཉིས་སྒྱུར་ཡིན་ན། \sqrt{x} ལུགས་ལྡན་གྲངས་རེད།

2) གལ་ཏེ་ x ལུགས་ལྡན་མོ་གྲངས་ཡིན་ན། $\sqrt[3]{x^3} = x$ འདྲ་མཚུངས་མ་ཡིན།

3) རིམ་གྲངས་གང་རུང་ x ལ་ $x^{\frac{3}{2}}$ རི་ལུགས་ལྡན་གྲངས་རེད།

4) $\sqrt[p]{x^q}$ ཡི་རྟོན་གྲངས་རྣམས་པ་ $x^{\frac{p}{q}}$ རེད།

5) $\left(x^{\frac{1}{p}}\right)^q$ ཡི་གཞི་ཚུལ་རྣམས་པ་ $pq\sqrt{x}$ རེད།

6) ལུགས་ལྡན་གྲངས་ $x > 0$ ཚང་མའི་སྟབས་ རེད།

7) གཞི་ཚུལ་གྱི་ཐེངས་གྲངས་ལ་མོ་གྲངས་འོང་མི་སྲིད།





དུན་པར་གྱིས།



༡། གལ་ཏེ་ m རི་རིལ་གྲངས་པོ་དང་། x དང་ y རི་ $x^m = y$ ཅན་གྱི་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཡིན་ན།
 $y^{\frac{1}{m}} = x$ ཡིན།

༢། $y^{\frac{1}{m}}$ རི་ y ཡི་གཞི་གྲངས་ m རེས་སློབ་པ་དང་། $\sqrt[m]{y}$ ལྟར་འབྲི་དགོས།

༣། གལ་ཏེ་ $x = \frac{r}{s}$ རི་སྐད་ཀོར་མིན་པའི་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཡིན་ན། $\left(\frac{r}{s}\right)^{-m} = \left(\frac{s}{r}\right)^m$ ཡིན།

༤། ལྷགས་ལྡན་སློབ་གྲངས་ $\frac{p}{q}$ ལ།

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} \text{ ཡིན། } \quad (x^p \text{ ཡི་གཞི་གྲངས་} q \text{)}$$

$$\text{ཡང་ན། } x^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p \text{ ཡིན། } \quad (x \text{ ཡི་གཞི་གྲངས་} q \text{ ཡི་སློབ་གྲངས་} p \text{)}$$

༥། གལ་ཏེ་ $x = \frac{r}{s}$ རི་ལྷགས་ལྡན་གྲངས་ཡིན་ན། $x^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{r}{s}\right)^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{p}{q}}$ ཡིན།

༦། གལ་ཏེ་ n ལྷགས་ལྡན་གྲངས་པོ་དང་ m དང་ n ལྷགས་ལྡན་སློབ་གྲངས་གང་རུང་ཡིན་ན།

$$\text{༧) } x^m \times x^n = x^{m+n}$$

$$\text{༨) } x^m \div x^n = x^{m-n}$$

$$\text{༩) } \left(x^m\right)^n = x^{m \times n}$$

༧། གལ་ཏེ་ x དང་ y རི་ལྷགས་ལྡན་པོ་གྲངས་དང་། m རི་ལྷགས་ལྡན་སློབ་གྲངས་གང་རུང་ཡིན་ན།

$$x^m \times y^m = (x \times y)^m$$

༨། གལ་ཏེ་ $x = \sqrt[q]{y} = y^{\frac{1}{q}}$ ཡིན་ན། $y^{\frac{1}{q}}$ རི་སློབ་གྲངས་ཀྱི་རྣམ་པ་དང་། $\sqrt[q]{y}$ རི་གཞི་རྒྱུ་ཀྱི་རྣམ་པ་

རེད། འདིར་ q རི་སློབ་གྲངས་སམ་ཐེངས་གྲངས་དང་། y རི་རྒྱུར་གཞིའི་གྲངས་སམ་གཞི་གྲངས་ཡིན།

